現代的な視点からの

場の量子論 基礎編

V.P.ナイア 著
阿部泰裕／磯 暁 訳

Springer
シュプリンガー・ジャパン

Translation from the English language edition:
Quantum Field Theory by V.P. Nair

まえがき

場の量子論は，量子力学が発見された直後のディラックの研究に端を発し，これまでに数多くの素晴らしい成果を上げてきた．きわめて精密に検証されている量子電磁力学や電弱相互作用と色力学（核力）を記述する標準模型は，成功を収めた場の量子論の一例である．また，場の理論は超伝導，超流動あるいは量子ホール効果などといった物性物理学が扱うさまざまな現象へも応用されてきた．さらに，繰り込み群の概念によって，場の理論一般，特に臨界現象の理解に新たな視点が与えられた．現在に至っては，場の量子論が，おそらく量子重力を除くすべての物理現象を記述し理解するための数学的・理論的な枠組みであるという確固たる論拠があるといえよう．

このことはまた，場の量子論がいまや膨大な内容を含む研究対象であり，多くの関連分野や派生的なトピックをもつようになったことを意味する．そのため，限られたページ数のなかでこれらを網羅する本を書くことは不可能である．もちろん中心となる共通のテーマは存在するが，場の理論のいかなる教科書も最終的には著者が興味をもち面白いと感じる内容が提示されることになる．この教科書も例外ではない．つまり，ここでは，相互に関係していると思われる場の理論のいくつかのテーマについての私自身の見解が示されている．なお，本書は私がコロンビア大学とニューヨーク市立大学で教えた場の理論と素粒子物理学の講義をもとに書き改めたものである．

12 章までの前半部では，場の量子論の講義で一般的に扱われる内容が含まれているが，読者のなかには，その説明の仕方に他の教科書とは異なる雰囲気を感じ取られる方がいるかもしれない．この前半部は，通常の場の理論の

講義に使用できる．ただし，3 章の最後の 3 節，8 章の最後の 2 節，10 章の 6 節と 7 節は省略してもよいであろう．また，後半部の章では，ここ 30 年ほどの間に発展した場の理論の位相幾何学的（トポロジカル）および幾何学的な側面に関する，より現代的な内容が扱われている．この部分の議論で基礎となる数学については，ごく簡単に説明せざるを得なかった．したがって，関連する数学については参考文献で補足しながらこれらの章を読み進めていただきたい．この教科書では，標準模型をよりよく理解するために必要な理論を解説することに力点を置いた．超対称性，超重力理論，および弦理論に関係する場の理論の発展などについては議論していない．また，繰り込み群についての詳しい議論も行わなかった．これらのトピックについて詳細に記述するには，それだけで各々一冊の本が必要である．この教科書は基本的に私の講義の流れに沿ったものであり，学生には，種々のトピックについてのより詳しい取り扱い方を紹介した．したがって，本書は，現在もなお進行中の詳細かつ幅広い研究へ向けての入門にすぎない．参考文献については，おもに本文での議論に関連するものだけを引用した．より完全な文献リストや歴史的な発展については，これらの参考文献を参照してもらいたい．

この本を書くに当たり多くの方の助けを得た．何年にもわたる私の研究生活のなかで得ることのできた多くの共同研究者に感謝したい．彼らはみな，いろいろな意味で私の場の理論に対する理解へ貢献してくれた．まず，さまざまな意見をくれた多くの学生たち，特に阿部泰裕と李海龍（リーハイロン）にはいくつかの章を読んでもらった．友人そして共同研究者であるラシミ・レイ (Rashmi Ray) とジョージ・トンプソン (George Thompson) には多くの章を読んでもらい，提言および修正箇所の指摘をしてもらった．彼らには特に感謝したい．最後に，この本を執筆するに当たり大きな支えとなった，私の妻であり長年の共同研究者でもあるディミトラ・カラバリ (Dimitra Karabali) に深い感謝の意を表したい．

ニューヨーク　　　　V. パラメスワラン・ナイア
2004 年 5 月　　　　ニューヨーク市立大学

目　次

発展編の目次

第1章

相対論的量子力学のまとめ

1.1 表記法

テンソルなどに重複して現れる添え字についてはその和をとることにする．また，ギリシャ文字（μ, ν など）は時空間の座標を表し，$0, 1, 2, 3$ の値をとる．小文字のローマ字は空間座標を表し，$1, 2, 3$ の値をとるものとする．

ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ の成分は $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, $\eta_{0i} = 0$ で与えられる．また簡単のため，$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ と書くことにする．4 元ベクトル A_μ と B_ν のスカラー積は $A \cdot B = A_0 B_0 - A_i B_i$ となる．このような積（例えば運動量と座標の積）がベキ指数に現れるときは，単に px と表記する．これは $p_0 x_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$ の意味であり，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}$ は 3 次元ベクトルを表す．

レビ-チビタ (Levi-Civita) 記号 ϵ^{ijk} は，2 つの添え字の交換について反対称である．ただし，$\epsilon^{123} = 1$ とする．$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ も同様に定義され，$\epsilon^{0123} = 1$ をみたす．

時空間の 2 点 x, y が $(x-y)^2 < 0$ をみたしているとき，2 点は空間的 (spacelike) に離れていると呼ばれる．これは，2 点間の空間距離が時間間隔 $|x^0 - y^0|$ のうちに光が走る距離よりも長いことを意味する．

記号 ∂ は空間あるいは時空間領域の境界を示す．つまり，∂V と $\partial \Sigma$ はそれぞれ空間体積 V と時空間領域 Σ の境界を表す．

以下では相対論的量子力学のまとめを行う．ここでは単に結果だけを記すにとどめる．これらの結果の導出については，相対論的量子力学のほとんどの教科書で紹介されているので，それらを参照されたい．

1.2　スピン0粒子

まず，粒子が体積 $V = L^3$ の立方体の中にあると考え，計算の最後に $V \to \infty$ の極限をとることにする．運動量が $\boldsymbol{k}$ の1粒子の波動関数は

$$u_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{1.1}$$

ととれる．ただし，$\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + m^2}$ である．ここで，空間座標について周期的境界条件を選ぶ．つまり，空間方向の L だけの並進に対して $u_k(x+L) = u_k(x)$ が成り立つとする．したがって，$\boldsymbol{k}$ の値は

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \tag{1.2}$$

で与えられる．ここで，(n_1, n_2, n_3) は整数である．波動関数 $u_k(x)$ は正規直交関係

$$\int_V d^3x\ [u_k^*(i\partial_0 u_{k'}) - (i\partial_0 u_k^*)u_{k'}] = \delta_{k,k'} \tag{1.3}$$

をみたす．$\delta_{k,k'}$ は対応する n_i の値についてのクロネッカーの δ を表す．つまり，

$$\delta_{k,k'} = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'}\delta_{n_3,n_3'} \tag{1.4}$$

となる．$V \to \infty$ の極限で，

$$\delta_{k,k'} \to \frac{(2\pi)^3}{V}\,\delta^{(3)}(k-k'), \tag{1.5}$$

$$\sum_k \to \int V\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{1.6}$$

となる．運動量の固有状態 $|k\rangle$ についての完全性の条件は

$$\int |k\rangle\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}\,\langle k| = 1 \tag{1.7}$$

と書ける．ただし，$k_0 = \omega_k$ である．

波動関数 u_k は，明らかに方程式

$$i\frac{\partial u_k}{\partial t} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\,u_k \tag{1.8}$$

の解である．右辺の微分演算子は局所的な演算子ではない．これは次の意味で理解されるべき演算子である．

$$\sqrt{-\nabla^2 + m^2} f(x) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} f(k). \tag{1.9}$$

ただし，

$$f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(k) \tag{1.10}$$

である．波動関数 u_k に対する局所的な微分方程式を定義することもでき，これがクライン–ゴルドン (Klein–Gordon) 方程式

$$(\Box + m^2) u(x) = 0 \tag{1.11}$$

を与える．ここで，$\Box$ はダランベール演算子 $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_0)^2 - \nabla^2$ である．

クライン–ゴルドン方程式をスピン 0 粒子を定義する基礎方程式とみなして，その解として $u_k(x)$ を構成することもできる．このとき，波動関数の内積は，クライン–ゴルドン方程式による時間発展のもとで不変であるという要請から決めることができる．よって，クライン–ゴルドン方程式をみたす関数 u, v の内積は

$$(u|v) = \int d^3x\ [u^* i\partial_0 v - i\partial_0 u^* v] \tag{1.12}$$

で与えられる．実際，この時間微分は

$$\begin{aligned}
\partial_0 (u|v) &= \int d^3x \left[\partial_0 u^* i\partial_0 v - i\partial_0 u^*\, \partial_0 v + i u^* \partial_0^2 v - i\partial_0^2 u^* v\right] \\
&= \int d^3x \left[i u^* (\nabla^2 - m^2) v - i(\nabla^2 - m^2) u^* v\right] \\
&= \int d^3x\, \nabla \cdot [u^* i\nabla v - i\nabla u^* v] \\
&= \oint_{\partial V} dS \cdot [u^* i\nabla v - i\nabla u^* v] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

となる．最後の等式は周期的境界条件から導かれた．これより，この内積はクライン–ゴルドン方程式に従う時間発展のもとで保存することがわかる．よって，(1.12) が正しい選択であり，(1.3) がこの場合の正規直交条件として適切なものであることがわかる．

1.3 ディラック方程式

ディラック方程式の基本変数は，列ベクトルとみなせるディラック・スピノール $\Psi_r(x)$ $(r=1,2,3,4)$ で与えられる．$\Psi_r(x)$ は空間と時間の複素関数である．ディラック方程式は

$$(-i\gamma^{\mu}_{rs}\partial_{\mu}+m\delta_{rs})\Psi_s(x)=0 \tag{1.14}$$

で与えられる．これを行列表示で書くと，

$$(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\mathbf{1})\Psi(x)=0 \tag{1.15}$$

となる．ここで，$\mathbf{1}$ は恒等行列 $\mathbf{1}=\delta_{rs}$ であり，γ^{μ} は反交換関係，すなわちクリフォード代数の関係

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{1.16}$$

に従う 4 つの行列である．

この関係式をみたす 1 組の行列は

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix} \tag{1.17}$$

で与えられる．ここで，γ^0 に現れる単位元は 2×2（2 行 2 列）の単位行列である．γ 行列は 4×4 行列で与えられる．また，σ^i はパウリ行列

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

である．

上の γ 行列の相似変換 $(\gamma\rightarrow\gamma'=S^{-1}\gamma S)$ もやはりクリフォード代数の関係式をみたす．クリフォード代数の基本定理によると，このような相似変換の自由度を除けば，γ 行列の唯一の既約な表現は上の行列の組で与えられる．

ディラック方程式のラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\bar{\Psi}(i\gamma\cdot\partial-m)\Psi \tag{1.19}$$

である．ここで，$\bar{\Psi}$ は Ψ の共役をもちいて

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \tag{1.20}$$

と定義される．ディラック・スピノールのローレンツ変換は

$$\Psi'(x) = S\Psi(L^{-1}x) \tag{1.21}$$

で与えられる．ここで，$x'^\mu = (L)^\mu_\nu x^\nu$ は座標のローレンツ変換を表す．無限小変換のもとで，$x'^\mu \approx x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$ となる．$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ はローレンツ変換のパラメータである．したがって，スピノールの変換は

$$\Psi'(x) \approx \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\Psi(x), \tag{1.22}$$

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu} \tag{1.23}$$

で与えられる．$S_{\mu\nu}$ は $M_{\mu\nu}$ におけるスピン項

$$S_{\mu\nu} = -\frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{1.24}$$

である．$S_{12} = S_3$ を計算すると，Ψ はスピン $\frac{1}{2}$ に対応していることが確認できる．相対論的な変換に関するより詳細な事項は付録に与えられている．

平面波の解には 2 つのタイプがある．すなわち，$p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \equiv E_p$ となる解と $p_0 = -E_p = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ となる解である．このとき，正のエネルギー解は

$$\Psi(x) = u_r(p)\,e^{-ipx} = u_r(p)\,e^{-iEx^0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{1.25}$$

と書け，負のエネルギー解は

$$\Psi(x) = v_r(p)\,e^{ipx} = v_r(p)\,e^{iEx^0 - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{1.26}$$

と書ける．上式では，px に現れる p_0 がどちらの場合も E となるように，ベキ指数の符号を明示した．

スピノール $u_r(p), v_r(p)$ $(r = 1, 2)$ は

$$u_r(p) = B(p)w_r, \quad v_r(p) = B(p)\tilde{w}_r \tag{1.27}$$

で与えられる．ただし，

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

および

$$B(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{E+m}{2m}} & \dfrac{\sigma\cdot p}{\sqrt{2m(E+m)}} \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{\sqrt{2m(E+m)}} & \sqrt{\dfrac{E+m}{2m}} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

である．ここで，$E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ である．また，γ 行列として前出の表現をもちいた．

$B(p)$ は，粒子の静止系から速度 $v^i = p^i/E$ の座標系へのブースト変換であることが簡単にわかる．またローレンツ変換の性質から，$\Psi^\dagger\Psi$ がローレンツ不変でないことは明らかである．よって，ここでは波動関数のローレンツ不変な規格化を

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(p)v_s(p) = -\delta_{rs} \tag{1.30}$$

と選んだ．

$B(p)$ の定義をもちいると，関係式

$$\sum_r u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{(\gamma\cdot p+m)}{2m}, \quad \sum_r v_r(p)\bar{v}_r(p) = \frac{(\gamma\cdot p-m)}{2m} \tag{1.31}$$

が成り立つ．また，平面波の解の完全性は関係式

$$\sum_r \left[u_r(p)\bar{u}_r(p) - v_r(p)\bar{v}_r(p)\right] = 1 \tag{1.32}$$

で表せる．さらに，

$$\bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) = \frac{p^\mu}{m}\delta_{rs} = \bar{v}_r(p)\gamma^\mu v_s(p), \tag{1.33}$$

$$u_r^\dagger(\boldsymbol{p})v_s(\boldsymbol{p}) = v_r^\dagger(\boldsymbol{p})u_s(-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{1.34}$$

が成り立つ．

カイラリティ行列 γ_5 は

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta \tag{1.35}$$

で定義される．前出の γ 行列の表現から，

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

となる．もう 1 つの有用な表現として，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

がある．左巻き，右巻きのカイラリティをもつスピノールは

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi, \quad \Psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi \tag{1.38}$$

で定義される．これらは，固有値が ± 1 となる γ_5 の固有状態にそれぞれ対応している．

参考文献

1. 本章の内容の大部分は標準的なものであり，発展的な量子力学の教科書のほとんどで扱われている．詳細な教科書として W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer-Verlag, 3rd edition (2000) がある．

2. クリフォード代数の表現に関する基本定理は，多くの一般文献で扱われている．特に 2 つ挙げると，S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper and Row, New York (1961); J.M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag (1955 & 1976) がある．また，スピノールに関する興味深い議論については，Michael Stone, *The Physics of Quantum Fields*, Springer-Verlag (2000) の Appendix D を参照されたい．

第2章

場の構成法

2.1　粒子と場の対応関係

粒子的な描像をもつ通常の量子力学では，多体波動関数をもちいて量子多体系を記述することができる．しかし，例えば中性子のベータ崩壊 $n \to p+e+\bar{\nu}_e$ など，粒子の数が保存されない場合が数多く存在する．また，$e^+e^- \to 2\gamma$ のように，粒子の総数が保存されたとしても，各粒子の数が保存されない場合もある．これらの過程を議論するには，粒子数が固定された波動関数による通常の多体系量子力学の理論を拡張して，相互作用を通した粒子の生成消滅を導入しなければならない．その結果得られる理論形式が場の量子論である．

原子核物理や物性物理学で扱う現象においては，非相対論的な記述で十分な場合が多い．しかし，素粒子物理学では相対論的効果が重要となる場合がほとんどである．相対論は質量とエネルギーの転換つまり粒子の生成と消滅を可能にする．したがって，相対論的な多体系量子力学は必然的に場の量子論となる．本書の目的は，場の量子論の基礎づけについて議論を展開することである．

粒子の生成消滅とは異なる観点から，場の量子化を要請する別の理由も存在する．ボーア (Bohr) とローセンフェルト (Rosenfeld) の解析によると，原子核で起こるような荷電粒子のさまざまな量子的振る舞いは，電磁場の古典的な描像だけからは理解が困難であることが示されている．つまり，電磁場は量子化されなければならない．ちなみに，この要請は量子化によって生じる多粒子的な解釈とは独立に導かれる．また，これ以外の場の量子化につい

ても同様の議論を行うことができる．

場の理論には2つの相互補完的な手法がある．1つは，まず場を基本的な力学変数と仮定して，ハミルトニアン演算子の対角化などでその量子力学的な性質を議論し，その結果として多粒子の言葉で場の理論を解釈する手法である．もう1つの手法は，点粒子を基本的な構成要素と考えて，多粒子状態を有効に記述するような場の演算子を導出，構成していく手法である．ここでは，後者の場合から考えよう．つまり，異なるタイプあるいは種類の粒子それぞれについて，場の演算子を構成していこう．粒子の特性は，回転やローレンツ変換などのもとで，場の演算子がどのように変換するかによって決まる．これより，粒子と場の対応関係は次のように分類される．

粒子	場
スピン0ボース粒子	$\phi(\boldsymbol{x},t)$, ϕ は実スカラー場
荷電スピン0ボース粒子	$\phi(\boldsymbol{x},t)$, ϕ は複素スカラー場
光子 （スピン1，無質量ボース粒子）	$A_\mu(\boldsymbol{x},t)$，実ベクトル場 （電磁ベクトルポテンシャル）
スピン $\frac{1}{2}$ フェルミ粒子 （$e^{\pm}$，クォークなど）	$\psi_r(\boldsymbol{x},t)$，スピノール場

最も簡単な場合は，中性（電荷のない）スピン0ボース粒子なので，まずこの理論を記述することから始めよう．

2.2　スピン0ボース粒子 —— 場の演算子の構成法

質量が m で相互作用をしない中性スピン0ボース粒子を考えよう．4元運動量が k_μ の1粒子の波動関数 $u_k(x)$ は1章で与えられた．体積 V の立方体で規格化した波動関数は

$$u_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0V}} \tag{2.1}$$

となる．このとき，系の状態が明らかに次のように表される．

$|0\rangle$ = 真空状態，　無粒子状態．
$|1_k\rangle = |k\rangle$ = 運動量 $\boldsymbol{k}$，エネルギー $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} = \omega_k$ の 1 粒子状態．
$|1_{k_1}, 1_{k_2}\rangle = |k_1, k_2\rangle$ = 運動量 $\boldsymbol{k}_1$ の粒子と運動量 $\boldsymbol{k}_2$ の粒子の 2 粒子状態．
（ただし，粒子はそれぞれ対応するエネルギーをもつ．）
$|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots\rangle$ = 運動量 $\boldsymbol{k}_1$ の n_{k_1} 粒子，運動量 $\boldsymbol{k}_2$ の n_{k_2} 粒子等々の多粒子状態．

ここで，粒子数が異なる状態を関係づける演算子を導入しよう．まず，運動量 $\boldsymbol{k}$ が固定された状態 $|0\rangle, |1_k\rangle, |2_k\rangle, \ldots, |n_k\rangle$ について考え，それらを関係づける演算子を導入し，その後にすべての $\boldsymbol{k}$ について一般化すればよい．粒子の消滅演算子 a_k を

$$a_k|n_k\rangle = \alpha_n|n_k - 1\rangle \tag{2.2}$$

と定義する．真空では粒子がないので，

$$a_k|0\rangle = 0 \tag{2.3}$$

を要請する．多粒子状態は正規直交系を成す．すなわち，

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1_k|1_k\rangle = \langle 2_k|2_k\rangle = \cdots = 1, \tag{2.4}$$

$$\langle n_k|n'_k\rangle = 0, \qquad n_k \neq n'_k \tag{2.5}$$

である．よって，(2.2) から

$$\langle n-1|a|n\rangle = \alpha_n \tag{2.6}$$

と書ける．ただし，添え字 k については，以下しばらく省略する．演算子 A に対して $\langle\psi|A\phi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle$ が成り立つので，(2.6) は

$$\langle a^\dagger(n-1)|n\rangle = \alpha_n \tag{2.7}$$

を与える．直交関係 (2.5) より，これは $a^\dagger|n-1\rangle$ が $|n\rangle$ に比例しなければならないことを示している．したがって，$a^\dagger$ は粒子の生成演算子であり，(2.7) より

$$a^\dagger|n\rangle = \alpha_{n+1}^*|n+1\rangle \tag{2.8}$$

と書ける．$aa^\dagger$ と $a^\dagger a$ の演算子は状態へ対角的に作用する．ここで，

$$a^\dagger a|n\rangle = |\alpha_n|^2\,|n\rangle \tag{2.9}$$

となる．さらに，(2.3) をもちいると $a^\dagger a|0\rangle = 0$ となるので，$\alpha_0 = 0$ を得る．

$\boldsymbol{k}$ を固定しているので，状態 $|n\rangle$ を特徴づける唯一の量子数は粒子数 n である．したがって，$a^\dagger a$ を粒子数演算子つまり粒子の数を与える演算子と定義しよう．これは最も単純な選択であり，これにより $\alpha_n = \sqrt{n}$ となる．（ただし，無関係な位相を 1 とおいた．）関係式 $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = 1$ から，もう一方の対角演算子 $aa^\dagger$ は粒子数演算子の定義としては適切でないことに注意しよう．$a^\dagger a$ を粒子数演算子とみなすと，

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{2.10}$$

が得られる．$a, a^\dagger$ についてのこれらの性質は，次の交換関係でまとめられる．

$$[a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad [a, a^\dagger] = 1. \tag{2.11}$$

実際，これらの交換関係は演算子 $a, a^\dagger$ の定義としてもちいられる．真空の定義 $a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1$ と合わせると，この交換関係から，すべての状態を再帰的に構成することができる．

ここまでは，ある決まった運動量 $\boldsymbol{k}$ について考えてきた．上の議論をすべての $\boldsymbol{k}$ へ一般化するには，それぞれの $\boldsymbol{k}$ に対して生成消滅演算子のペアを導入すればよい．そのような生成消滅演算子は

$$\begin{aligned} a_k|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \sqrt{n}_k\,|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, (n-1)_k, \ldots\rangle, \\ a_k^\dagger|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \sqrt{n_k+1}\,|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, (n+1)_k, \ldots\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

と書け，これらは交換関係

$$[a_k, a_l] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl} \tag{2.13}$$

をみたす．

ここまで，運動量でラベルされる抽象的な状態についてのみ議論してきたが，上の結果を波動関数 (2.1) をもちいて表すこともできる．実際，演算子

a_k, $a_k^\dagger$ と 1 粒子の波動関数 $u_k(x)$ を組み合わせて，場の演算子 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \sum_k \left[a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)\right] \tag{2.14}$$

と**定義**することができる．u_k と u_k^* はクライン–ゴルドン方程式に従うので，$\phi(x)$ もクライン–ゴルドン方程式をみたすことがわかる．つまり，

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{2.15}$$

である．

1 章でみたように，波動関数は実際には方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}u_k = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\, u_k \tag{2.16}$$

に従う．ただし，演算子 $\sqrt{-\nabla^2 + m^2}$ は局所演算子ではない．理論をできるだけ局所的に扱いたいので，この方程式を 2 次の形で表した．また，場の演算子を $\sum_k a_k u_k$，あるいはそのエルミート共役だけで定義できないのはなぜかと思われるかもしれない．その理由は，場の方程式を 1 次の形 (2.16) ではなく，クライン–ゴルドン方程式にとると，その解に正負の振動数をもつ関数つまり $u_k(x)$ と $u_k^*(x)$ の両方が含まれるからである．これらの関数を (2.14) のように組み合わせると，(2.14) と (2.15) の役割を入れ換えることができる．つまり，(2.15) を $\phi(x)$ の基礎方程式と仮定して，次にその解の完全系で $\phi(x)$ を展開すると (2.14) が得られる．このとき，モード展開の係数 a_k, $a_k^\dagger$ は (2.13) をみたす演算子とする．これより，多粒子的な描像を再構成できる．ただ，ここでは場 $\phi(x)$ が基本的な物理量として扱われている．1 粒子的な量子力学では，負の振動数をもつ解を波動関数として解釈することは困難であったが，ここでは生成演算子と関連して自然に現れることに注意しよう．

場の演算子 $\phi(x)$ をもちいると，状態 $|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots\rangle$ の多粒子波動関数は，規格化因子を省略すれば，

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots\rangle \tag{2.17}$$

と表せる．ただし，$N = n_{k_1} + n_{k_2} + \cdots$ である．a_k は互いに交換するので，波動関数 $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ は粒子の位置の入れ換えについて対称的であることがわかる．したがって，交換関係 (2.13) で特徴づけられる粒子はボース

粒子である．

以上を要約すると，まず多粒子状態のヒルベルト空間に生成消滅演算子が導入できることをみた．これらの演算子は交換関係 (2.13) をみたす．このとき，場の演算子 $\phi(x)$ はこれらの生成消滅演算子で構成され，クライン–ゴルドン方程式に従う．反対に，クライン–ゴルドン方程式に従うような場 $\phi(x)$ をまず仮定する．その解の完全系で $\phi(x)$ を展開すると (2.14) が得られ，展開式の確率振幅あるいは係数を (2.13) に従う演算子にとることができる．よって，場の演算子 $\phi(x)$ から多粒子的な解釈を再現することができる．

場の演算子 $\phi(x)$ はスカラーである．これはエルミート演算子なので，古典的には実スカラー場に対応している．このスカラー場で記述される粒子はボース粒子である．

2.3　ラグランジアンとハミルトニアン

場の演算子 $\phi(x)$ は運動方程式

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{2.18}$$

に従う．$\phi(x)$ が演算子ではなく，通常の c 数の場 $\varphi(x)$ であるとすると，対応する変分方程式（あるいは極値化条件）がクライン–ゴルドン方程式 (2.18) となるようなラグランジアンおよび作用を書き下すことができる．そのようなラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^2\right] \tag{2.19}$$

で与えられる．時空間の領域を $\varSigma$ とすると作用は

$$\mathcal{S} = \int_\varSigma d^4x\,\mathcal{L} \tag{2.20}$$

となる．運動方程式は場の境界値を固定しながら作用 $\mathcal{S}$ を極値化する条件つまり $\delta\mathcal{S} = 0$ から導かれる．いまの場合，

$$\delta\mathcal{S} = \int_\varSigma d^4x\left[-(\Box + m^2)\varphi\right]\delta\varphi + \oint_{\partial\varSigma} d\sigma^\mu\,(\partial_\mu\varphi)\delta\varphi \tag{2.21}$$

である．φ の値を $\varSigma$ の境界 $\partial\varSigma$ で固定，つまり $\partial\varSigma$ 上で $\delta\varphi = 0$ としたときの変分を考えると，$\varSigma$ の内部で $\delta\varphi$ は任意であるので，作用の極値化は運動

方程式

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{2.22}$$

を与える．

ラグランジアン $\mathcal{L}$ はローレンツ・スカラーであることに注意しよう．また，作用を

$$\mathcal{S} = \int dt\, d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 - \frac{1}{2}\{(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\}\right] \tag{2.23}$$

と表すと，これは標準的な形 $\int dt\,(T-U)$ になっていることがわかる．ただし，運動エネルギーは $T = \int d^3x\, \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2$ であり，ポテンシャルエネルギーは $U = \int d^3x\, \frac{1}{2}[(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]$ である．ハミルトニアンは

$$H = T + U = \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[(\partial_0\varphi)^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] \tag{2.24}$$

で与えられる．ここで，c 数の場 φ を場の演算子 $\phi(x)$ で置き換えると，ハミルトニアン演算子

$$H = \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{2.25}$$

を得る．$\phi(x)$ のモード展開式 (2.14) をもちいると

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_k\, a_k^\dagger a_k + \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2}\omega_k \tag{2.26}$$

となる．ただし，$\omega_k = k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ である．多粒子状態に作用すると，$a_k^\dagger a_k$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ の粒子数を与える．したがって，(2.26) の H は，$\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2}\omega_k$ という余分な項を除けば，状態のエネルギーを与える．この余分な項は真空状態のエネルギーでありゼロ点エネルギーと呼ばれる．これは，量子化において演算子の順序が一意的でないために生じる．c 数による表示 (2.24) は，φ を演算子 ϕ で置き換えるに際して，a_k と $a_k^\dagger$ の順序を指定しない．よって，多粒子的な描像と無矛盾であるためには，(2.26) のゼロ点エネルギーの項を落として，ハミルトニアン演算子を

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_k\, a_k^\dagger a_k \tag{2.27}$$

と定義しなければならない．実は，このようにゼロ点エネルギーを取り除く

のには，より本質的な理由がある．これは，後で解説するように，真空のローレンツ不変性と関連している．ここでは，しばらくこのことを量子化の規則の一部とみなそう．すなわち，φ を演算子 ϕ で置き換えるに際し，演算子の順序は真空のエネルギーがゼロになるように選択されなければならない．

ハミルトニアンの定義と同じように，運動量の演算子を

$$P_i = \sum_k k_i\, a_k^\dagger a_k \tag{2.28}$$

と定義できる．これが多粒子状態の総運動量であることは簡単に確かめられる．

ラグランジアンは本質的に理論に関するすべての情報をもつ．つまり，ラグランジアンは運動方程式，ハミルトニアンや運動量などの演算子，また，後でみるように交換関係を与えるだけでなく，相互作用や対称性を簡単明瞭に特定する方法を提供してくれる．よって，ラグランジアンは以下の議論のすべてで主要な役割を担うことになる．

2.4　汎関数微分

汎関数微分は場の理論において非常に有用な数学的概念である．作用 $\mathcal{S}$ が場 $\varphi(x)$ の汎関数であるとは，作用が関数 $\varphi(x)$ の特定の形に依存するということである．より具体的に，$\varphi(x)$ を完全系を成す関数 $f_n(x)$ をもちいて

$$\varphi(x) = \sum_n c_n\, f_n(x) \tag{2.29}$$

と展開しよう．このとき，$\varphi(x)$ は $\{c_n\}$ の値を与えることによって特定される．つまり，$\{c_n\}$ と $\{c'_n\}$ が異なれば，対応する関数も異なる．したがって，$\varphi(x)$ の汎関数形式の変分は c_n の変分

$$\varphi(x) + \delta\varphi(x) = \sum_n (c_n + \delta c_n)\, f_n(x), \tag{2.30}$$

$$\delta\varphi(x) = \sum_n \delta c_n\, f_n(x) \tag{2.31}$$

をとることで実行される．汎関数（つまりある $\varphi(x)$ の汎関数形式に依存する量）は一般に

$$I[\varphi] = \int_\Sigma d^4x\ \rho(\varphi, \partial\varphi, \ldots) \tag{2.32}$$

と書ける．場の理論における応用のほとんどでは，$I[\varphi]$ のような汎関数の変分だけが必要であり，その変分は φ の境界値を固定しながら φ を Σ の内部で変化させることで得られる．これは，$I[\varphi]$ の変分が，$\partial\Sigma$ 上で $\delta\varphi = 0$ として，必要であれば部分積分を行うことによって計算できることを意味する．よって，変分は次の形で表される．

$$\delta I[\varphi] = \int_\Sigma d^4x\ \sigma(x)\delta\varphi(x). \tag{2.33}$$

このとき，汎関数微分 $\frac{\delta I}{\delta\varphi(x)}$ は $\sigma(x)$ つまり $\delta\varphi(x)$ の係数で定義される．例えば，

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} &= \delta^{(4)}(x-y),\\ \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int_\Sigma d^4y\ \varphi^2(y) &= 2\varphi(x),\\ \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int_\Sigma d^4x\ (\partial\varphi)^2 &= 2(-\Box\varphi(x))\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる．(2.21) と (2.22) から

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi(x)} = -(\Box + m^2)\varphi(x) \tag{2.35}$$

となり，運動方程式は単に $\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi} = 0$ となることがわかる．

つぎに，もう少し正確に汎関数の変分と微分の概念を表してみよう．$\varphi(x)$ は実数値をとるので，時空間領域 Σ から実数 $\mathbf{R}$ への写像となる実関数空間を定義しよう．φ^2 や $(\partial\varphi)^2$ の積分が現れる作用のような汎関数を考えたいので，対象となる関数が

$$\int_\Sigma d^4x\ \varphi^2 < \infty, \qquad \int_\Sigma d^4x\ (\partial\varphi)^2 < \infty \tag{2.36}$$

を満たすことをさらに要請する．したがって，実関数空間 $\mathcal{F}$ は次のように特定される．

$$\mathcal{F} = \{\text{有限条件 (2.36) のもとで } \varphi : \Sigma \to \mathbf{R} \text{ となるすべての } \varphi\}. \tag{2.37}$$

$\mathcal{F}$ の要素は関数であり，必要であれば $\mathcal{F}$ の基底を与えるモード展開を定義することができる．作用のような汎関数は単に $\mathcal{F}$ から実数への写像である．

すなわち，これは $\mathcal{F}$ 上の実関数である．よって，汎関数微分を得るには通常の微分の概念をこの関数に適用すればよい．もちろん，関数空間 $\mathcal{F}$ は無限次元である．というのも，基底を求めるには一般に無限個の関数 $f_n(x)$ が必要であるためである．そのため，汎関数微分を定義するには和や積の収束性に注意しなければならない．

条件 (2.36) はスカラー場の問題に対応するものである．物理的に異なる状況では，適切な関数空間を定義する条件式は違ったものになる．また，関数自体も常に実関数であるとは限らない．ただ，いずれの場合においても，上記のような手法で適切な関数空間と汎関数微分を定義できることは明らかであろう．

2.5　フェルミ粒子の場の演算子

1 章でみたように，スピン $\frac{1}{2}$ 自由粒子の波動関数はディラック方程式の解として与えられる．以下では，この粒子の生成消滅演算子を導入しよう．粒子の消滅・生成演算子を $a_{p,r}$ と $a^\dagger_{p,r}$，また反粒子の消滅・生成演算子を $b_{p,r}$ と $b^\dagger_{p,r}$ で表す.（ただし，r はスピン状態を示す.）スピン 0 の場合と異なり，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子はフェルミ粒子である.（これは，整数スピンがボース粒子（ボソン）に対応し，半奇数スピンがフェルミ粒子（フェルミオン）に対応するという一般的な結果の一部である．この「スピン統計定理」については後で議論する.）**フェルミ粒子には排他律が成り立つ．すなわち，フェルミ粒子が二重に占拠する状態は存在しない．**ここで，運動量とスピン状態を固定して考えよう．しばらく添え字を省略すると，状態は $|0\rangle$, $c|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ となる．ただし，c は規格化因子であり，$|2\rangle = (a^\dagger)^2|0\rangle \equiv 0$ である．2 粒子によって占拠される状態はないので，$(a^\dagger)^2 = 0$, $(b^\dagger)^2 = 0$ が必要となる．これはまた

$$a^2 = 0, \qquad b^2 = 0 \tag{2.38}$$

を与える．粒子のない真空状態 $|0\rangle$ は

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0 \tag{2.39}$$

に従う．以前のように，$a^\dagger a$ を粒子数演算子と定義すると，これは

$$a^\dagger a|0\rangle = 0\,, \qquad a^\dagger a|1\rangle = |1\rangle \tag{2.40}$$

を導く．これより，$a|1\rangle = (1/c)|0\rangle$ がわかる．よって，状態の正規直交性から，上式は $|c|^2 = 1$ を与える．また，関係式 $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = |c|^2$, $\langle 1|aa^\dagger|1\rangle = 0$ も得られる．したがって，$(aa^\dagger + a^\dagger a)$ は $|0\rangle$ と $|1\rangle$ のどちらの状態に対しても 1 となる．そこで，演算子 a, $a^\dagger$ に対して反交換関係

$$a^2 = 0, \quad (a^\dagger)^2 = 0, \quad aa^\dagger + a^\dagger a = 1 \tag{2.41}$$

をもちいよう．反粒子の演算子についても，同様な反交換関係をもちいることとする．$(aa^\dagger - a^\dagger a)$ が定数となるような規則を課すと矛盾が生じることに注意しよう．運動量とスピンの添え字を付けて上の関係式 (2.41) を一般化すると

$$\begin{aligned}
&a_{p,r}a^\dagger_{k,s} + a^\dagger_{k,s}a_{p,r} = \delta_{rs}\delta_{p,k}, \\
&b_{p,r}b^\dagger_{k,s} + b^\dagger_{k,s}b_{p,r} = \delta_{rs}\delta_{p,k}, \\
&a_{p,r}a_{k,s} + a_{k,s}a_{p,r} = 0\,, \qquad a^\dagger_{p,r}a^\dagger_{k,s} + a^\dagger_{k,s}a^\dagger_{p,r} = 0\,, \\
&b_{p,r}b_{k,s} + b_{k,s}b_{p,r} = 0\,, \qquad b^\dagger_{p,r}b^\dagger_{k,s} + b^\dagger_{k,s}b^\dagger_{p,r} = 0\,, \\
&a_{p,r}b_{k,s} + b_{k,s}a_{p,r} = 0\,, \qquad a_{p,r}b^\dagger_{k,s} + b^\dagger_{k,s}a_{p,r} = 0\,, \\
&a^\dagger_{p,r}b_{k,s} + b_{k,s}a^\dagger_{p,r} = 0\,, \qquad a^\dagger_{p,r}b^\dagger_{k,s} + b^\dagger_{k,s}a^\dagger_{p,r} = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

となる．また，真空状態を $a_{p,r}|0\rangle = b_{p,r}|0\rangle = 0$ で定義すると，これらの反交換関係から，フェルミ粒子のすべての多粒子状態を再帰的に構成できることが確かめられる．

つぎに，これらの演算子と 1 粒子の波動関数を組み合わせてフェルミオンの場の演算子を構成してみよう．まず，波動関数 $u_r(p)\,e^{-ipx}$ は $a_{p,r}$ と組み合わされる．一方，$v_r(p)\,e^{ipx}$ の解はベキ指数 e^{iEt} を含むので，粒子の生成に対応する共役な波動関数として解釈されなければならない．よって，これは生成演算子と組み合わされなければならない．しかし，ここで $a^\dagger_{p,r}$ をもちいることはできない．もしそうすると，$a_{p,r}u_r(p)\,e^{-ipx} + a^\dagger_{p,r}v_r(p)\,e^{ipx}$ の組み合わせは，決まったフェルミオン数あるいは電荷を持たなくなる．というのも，一方の項が粒子を消滅させ（フェルミオン数を -1 変化させる過程に対応），もう一方の項が粒子を生成する（フェルミオン数を $+1$ 変化させる過

程に対応）からである．したがって，共役な波動関数には $b^{\dagger}_{p,r}$ をもちいなければならない．この場合，粒子の消滅と反粒子の生成は電荷やフェルミオン数を同じ量だけ変化させるので，矛盾なく粒子を記述できる．よって，フェルミオンの場の演算子は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p,r}\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\left[a_{p,r}\,u_r(p)e^{-ipx} + b^{\dagger}_{p,r}v_r(p)e^{ipx}\right],\\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p,r}\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\left[a^{\dagger}_{p,r}\bar{u}_r(p)e^{ipx} + b_{p,r}\bar{v}_r(p)e^{-ipx}\right]\end{aligned} \tag{2.43}$$

で与えられる．これらは方程式

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\psi = 0, \qquad -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0 \tag{2.44}$$

に従う．ここまで，方程式 (2.44) の解の完全系をもちいてきた．したがって，式 (2.44) を出発点とみなすこともできる．つまり，場 ψ と $\bar{\psi}$ の一般モード展開を書き下し，その係数を反交換関係 (2.42) に従う演算子と解釈することができる．よって，これより多粒子的な描像を再現することができる．

参考文献

1. 粒子の生成消滅演算子の導入は，放射の吸収・発散に関する 1927 年のディラックの論文にさかのぼる．反交換関係はジョルダン (Jordan) とウィグナー (Wigner) によって 1929 年に導入された．反交換関係は物理において広範にもちいられている．また，化学においても反応速度論のなかでもちいられている．本書はこの分野の歴史的な発展について追跡することが目的ではないので，原論文を引用することは無意味であろう．この分野の歴史的な発展については S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It*, Princeton University Press (1994) を参照されたい．また，原論文の多くはリプリント集 J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958) から簡単に入手できる．

2. ボーアとローセンフェルトの解析は N. Bohr and L. Rosenfeld, Kgl. Danske. Vidensk. Selsk. Mat-Fys. Medd, **12**, No. 8, (1933); Phys. Rev. **78**, 794 (1950) による．

第3章

正準量子化

3.1　ラグランジアン，相空間，ポアソン括弧

この章では正準量子化の基礎づけについて議論しよう．ここでは，粒子の波動関数をもちいて場を構成する代わりに，場そのものを基本的な力学変数とみなして，どのように場の量子論が得られるかをみていこう．

まず始めにボソン場を考えよう．この場は $\varphi_r(x)$ で表される．添え字 r あるいはその一部は，ベクトル場やテンソル場の時空間を表す添え字である．この添え字は独立な場の数をラベルする内部指数とみなすこともできる．ラグランジアン $\mathcal{L}$ は $\varphi_r(x)$ とその時空間微分のスカラー関数である．ここで，運動方程式は高々2 階の時間微分をもつものと仮定する．よって，$\mathcal{L}$ には高々 $(\partial_0\varphi)^2$ の時間微分項が現れる．多くの場合，これで十分である．運動方程式がより高階の時間微分をもつとすると，一般に非物理的なゴーストモード（量子論において負のノルムをもつモード）が現れる．（ラグランジアンが2 階以上の時間微分を含む理論についても正準形式を一般化することができる．これはオストログラズキー (Ostrogradskii) によって与えられた.）時間微分 $(\partial_0\varphi)$ について高次の項も，一般に，量子化に困難をきたすので，現実的な場合にそぐわないと考えられる．よって，これらの場合についてはこれ以上議論しないことにする．

ラグランジアンは $(\partial_0\varphi)$ について高々2 乗の項しかもたないので，ローレンツ不変性から，$\mathcal{L}$ は空間微分ついても高々2 乗の項しかもたないことが期待される．（場について 1 つの時間微分と複数の異なる空間微分を含むような

位相幾何学的（トポロジカル）なラグランジアンも存在するが，ここではそれらについて考えない．そのようなラグランジアンについては，幾何学的量子化を扱う 20 章で簡単に議論する.）時空間領域 Σ における作用は

$$\mathcal{S} = \int_{\Sigma} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r) \tag{3.1}$$

と表せる．時空間領域は，空間領域 V をもちいて $V \times [t_f, t_i]$ の形にとれる．運動方程式は変分原理で与えられる．つまり，時刻 t_i, t_f の始点・終点において固定された場の配位 $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t_i)$, $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t_f)$ を連結する古典的軌道 $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t)$ が作用の極値を与える．言い換えると，$\varphi(\vec{x}, t)$ $(t_i < t < t_f)$ について作用の変分をとり，その変分 $\delta\mathcal{S}$ をゼロとおくことで，運動方程式が得られる．これを明示的に表すと，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r}\delta\varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\partial_\mu \delta\varphi_r \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\right]\delta\varphi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\delta\varphi_r\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる.（重複する添え字 r については，通常どおりその和をとる.）$\mathcal{L}$ の変分を時空間領域 Σ で積分すると，$\delta\mathcal{S}$ が得られる．このとき，(3.2) の第 2 項は全微分項なので，$\partial\Sigma$ 上の表面積分となる．始点・終点において場の配位 $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t_i)$, $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t_f)$ を固定しているので，時刻 t_i, t_f で $\delta\varphi_r = 0$ である．さらに，$\delta\varphi_r$ あるいは $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi_r)}$ が空間の境界 ∂V でゼロになると仮定する．最終的には，空間体積が無限となる極限に興味があるので，この仮定は物理的に妥当なものである．またあるいは，空間方向について周期的境界条件を課してもよい．どちらの場合でも表面積分はゼロとなり，

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Sigma} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\right]\delta\varphi_r \tag{3.3}$$

が得られる．$\delta\varphi_r$ は任意の値をとるので，極値化の条件 $\delta\mathcal{S} = 0$ から運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} = 0 \tag{3.4}$$

が導出される．

つぎに，$\delta\varphi_r$ が t_i または t_f でゼロとならない一般的な変分について考え

てみよう．(3.2) の全微分項の積分は $\Theta(t_f) - \Theta(t_i)$ と書ける．ただし，

$$\Theta(t) = \int_V d^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)} \delta\varphi_r \tag{3.5}$$

である．この量 Θ は正準 1-形式と呼ばれる．

変分原理をもちいて作用の変分を求める際に，場の配位の始点・終点の値を固定した．このとき，古典的な軌道は 1 つしかないので，場の配位の始点・終点の値が古典軌道を特定すると言える．よって，これらすべての古典軌道の集合は理論の相空間として定義される．また，この古典軌道は，場の始点・終点の値ではなく，運動方程式の初期条件によって特定することもできる．運動方程式は 2 階の時間微分をもつので，初期条件は明らかにある初期時刻 t におけるデータ $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t)$, $\partial_0\varphi_r(\boldsymbol{x}, t)$ で与えられる．理論を形式化するには，$\partial_0\varphi_r$ よりも

$$\pi_r(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)} \tag{3.6}$$

をもちいるほうが便利である．したがって，スカラー場に対する相空間は，古典軌道をラベルする集合 $\{\pi_r(\boldsymbol{x}), \varphi_r(\boldsymbol{x})\}$ ($\boldsymbol{x}$は任意) と同じである．これより，場の理論の相空間は明らかに無限次元であることがわかる．また，π_r は φ_r に共役な正準運動量と呼ばれる．

正準 1-形式 Θ は

$$\Theta = \int_V d^3x \; \pi_r \delta\varphi_r \tag{3.7}$$

と書ける．(20 章で説明するように，この用語は Θ が相空間上の 1 次の微分形式であることに由来する.）スカラー場に限らず，より一般の力学系について，その相空間の変数（相空間上の座標）を $\xi^i(\boldsymbol{x})$ で表そう．正準 1-形式 Θ は作用の変分の表面項として定義され，その一般形は

$$\Theta = \int d^3x \, A_i(\xi, \boldsymbol{x}) \, \delta\xi^i(\boldsymbol{x}) \tag{3.8}$$

となる．ただし，A_i は ξ に依存する.（スカラー場のときは，$\xi^i = (\pi_r, \varphi_r)$, $A_i = (\pi_r, 0)$ となる.）Θ が与えられると，次式を定義できる．

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') &= \frac{\delta}{\delta\xi^i(\boldsymbol{x})} A_j(\boldsymbol{x}') - \frac{\delta}{\delta\xi^j(\boldsymbol{x}')} A_i(\boldsymbol{x}) \\ &= \partial_I A_J - \partial_J A_I = -\Omega_{ji}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{3.9}$$

最後の行では，簡単のため複合的な添え字 $I = (i, \boldsymbol{x})$, $J = (j, \boldsymbol{x}')$, $\partial_I = \delta/\delta\xi^i(\boldsymbol{x})$ をもちいた．Ω は**シンプレクティック構造**あるいは正準 2-形式と呼ばれる.（これは，場とその時間微分の空間上で定義された微分形式と考えられる.）計量テンソルが時空間の幾何学的な基本構造を定義するのと同じように，Ω は相空間の幾何学的な基本構造を定義する．Ω の定義からビアンキ恒等式

$$\partial_I \Omega_{JK} + \partial_J \Omega_{KI} + \partial_K \Omega_{IJ} = 0 \tag{3.10}$$

が得られることに注意しよう.

正準量子化において中心的な概念は，正準変換とそれに関連する母関数である．$\xi^i \to \xi^i + a^i(\xi)$ を正準変数の無限小変換としよう．この変換によって正準構造 Ω が保たれるとき，変換は正準であると言われる．Ω の変化には次の 2 つの原因がある．1 つは，Ω_{IJ} の成分が ξ 依存するためであり，もう 1 つは，相空間の座標系が変化することにより Ω_{IJ} が変換するためである.（Ω_{IJ} は座標変換のもとで共変な 2 階テンソルとして変換する.）よって，総変化量は

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{IJ} &= \partial_I \alpha_J - \partial_J \alpha_I, \\ \delta\Omega_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') &= \left[\frac{\delta}{\delta\xi^i(\boldsymbol{x})}\alpha_j(\boldsymbol{x}') - \frac{\delta}{\delta\xi^j(\boldsymbol{x}')}\alpha_i(\boldsymbol{x})\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} \alpha_I &= a^K \Omega_{KI}, \\ \alpha_i(\boldsymbol{x}) &= \int_V d^3x'\, a^k(\boldsymbol{x}')\Omega_{ki}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

である.（上式では，計算の詳細を示すため，複合的な添え字を展開した.）式 (3.11), (3.12) から，変換 $\xi^i \to \xi^i + a^i(\xi)$ が Ω を保存し正準変換となるのは，

$$\alpha_I \equiv a^K \Omega_{KI} = -\partial_I G \tag{3.13}$$

と書ける場合であることがわかる．ただし，G は相空間変数の関数である．このように定義された G は，正準変換の母関数と呼ばれる.（式 (3.13) は，相空間上で局所的には必要十分な条件である．相空間が自明でないトポロジーをもつ場合，$\delta\Omega$ がゼロとなる解として，より一般的なものが存在する．ま

た，たとえ局所的にはすべての解が (3.13) の形で表されるとしても，相空間上で大域的に G が存在するとは限らない．非自明なトポロジーに関する場合については，後の章で詳しく議論する.）

全微分項 $\partial_\mu F^\mu$ をラグランジアンに加えると，運動方程式は変わらないが，Θ は $\Theta \to \Theta + \delta \int d^3x\, F^0$ と変化する．$A_I \to A_I + \partial_I \int F^0$ とすると，これは (3.13) の形になるので，Ω は不変である．したがって，ラグランジアンへの全微分項の追加は正準変換の一例である．

Ω の逆元は $(\Omega^{-1})^{IJ}\Omega_{JK} = \delta^I_K$ で定義され，これは次のように展開できる．

$$\int_V d^3x' \,(\Omega^{-1})^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\Omega_{jk}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') = \delta^i_k\, \delta^{(3)}(x - x''). \tag{3.14}$$

以下の議論から明らかなように，Ω_{IJ} の可逆性は重要な概念である．Ω が可逆でない場合，ラグランジアンは特異 (singular) であると言われる．素朴な場の変数をもちいて可逆な Ω を定義できない場合が数多く存在する．その一例として，ゲージ対称性をもつ理論がある．このような場合は，余分な自由度を適切に除去することによって特異でない Ω を定義しなければならない．(ゲージ理論はこの例に相当する．つまり，余分な変数はゲージ固定の手法で除外される.）

Ω の逆元をもちいると，(3.13) を

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ}\partial_J G \tag{3.15}$$

と書き換えることができる．(3.11) から (3.15) までの議論より，上述のトポロジーの問題を除けば，すべての微小正準変換は相空間の関数 G に関連づけられることがわかる．また反対に，関数 G が与えられると，これは微小正準変換に関連づけられる．

変換 $\xi^I \to \xi^I + a^I$ のもとでの関数の変化は，汎関数微分演算子 $V_a = a^I\partial_I$ の作用によって与えられる．よって，そのような変換の交換関係は

$$[V_a, V_b] = \left(a^J\partial_J b^I - b^J\partial_J a^I\right)\partial_I \tag{3.16}$$

で与えられる．関数 F, G が，(3.15) によって，それぞれ a^I と b^I に関係づけられるとしよう．すると，このとき

$$a^J\partial_J b^I - b^J\partial_J a^I =$$

$$\left[(\Omega^{-1})^{JL}\partial_J(\Omega^{-1})^{IK}-(\Omega^{-1})^{JK}\partial_J(\Omega^{-1})^{IL}\right]\partial_L F\,\partial_K G$$
$$+(\Omega^{-1})^{JL}(\Omega^{-1})^{IK}\left[\partial_L F\partial_J\partial_K G-\partial_J\partial_K F\partial_L G\right] \tag{3.17}$$

となる．また，恒等式 (3.10) をもちいると

$$\begin{aligned}(\Omega^{-1})^{JL}\partial_J(\Omega^{-1})^{IK}&-(K\leftrightarrow L)\\ &=(\Omega^{-1})^{IM}(\Omega^{-1})^{JL}(\Omega^{-1})^{NK}\times\left[\partial_N\Omega_{MJ}+\partial_J\Omega_{NM}\right]\\ &=-(\Omega^{-1})^{IM}(\Omega^{-1})^{JL}(\Omega^{-1})^{NK}\partial_M\Omega_{JN}\\ &=(\Omega^{-1})^{IM}\partial_M(\Omega^{-1})^{KL}\end{aligned} \tag{3.18}$$

と書ける．これを (3.17) に代入すると

$$a^J\partial_J b^I-b^J\partial_J a^I=(\Omega^{-1})^{IM}\partial_M\left[(\Omega^{-1})^{KL}\partial_K G\partial_L F\right] \tag{3.19}$$

と変形できる．これより，$a\leftrightarrow F$, $b\leftrightarrow G$ とすると，対応する無限小変換の交換関係が関数 $-\{F,G\}$ に対応していることがわかる．ただし，

$$\begin{aligned}\{F,G\}&=(\Omega^{-1})^{IJ}\partial_I F\partial_J G\\ &=\int d^3x\,d^3x'\,(\Omega^{-1})^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\delta F}{\delta\xi^i(\boldsymbol{x})}\frac{\delta G}{\delta\xi^j(\boldsymbol{x}')}\end{aligned} \tag{3.20}$$

である．関数 $\{F,G\}$ は母関数 F と G のポアソン括弧と呼ばれる．このように，ポアソン括弧は正準変換の構成において自然に現れる．座標 ξ^I 自体のポアソン括弧は $\{\xi^I,\xi^J\}=(\Omega^{-1})^{IJ}$，つまり

$$\{\xi^i(\boldsymbol{x}),\xi^j(\boldsymbol{x}')\}=(\Omega^{-1})^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{3.21}$$

となる．また，Θ が (3.7) の簡単な形をもつとき，相空間変数の 2 つの関数 $F(\pi,\varphi)$, $G(\pi,\varphi)$ に関するポアソン括弧は

$$\{F,G\}=\int_V d^3x\left[\frac{\delta F}{\delta\varphi_r}\frac{\delta G}{\delta\pi_r}-\frac{\delta F}{\delta\pi_r}\frac{\delta G}{\delta\varphi_r}\right] \tag{3.22}$$

となる．

式 (3.15) をポアソン括弧の定義式と比較すると，

$$a^I\equiv\delta\xi^I=\{\xi^I,G\} \tag{3.23}$$

となることがわかる．実際，上式を母関数の定義式とみなすことができる．

反対に，相空間の関数 G に対して，(3.23) で定義される ξ^I の変換，つまり G とのポアソン括弧は正準変換となる．$\xi^i = (\pi_r, \varphi_r)$ となる簡単な場合，(3.23) は

$$\delta\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta G}{\delta\pi_r(\boldsymbol{x})}, \qquad \delta\pi_r(\boldsymbol{x}) = -\frac{\delta G}{\delta\varphi_r(\boldsymbol{x})} \tag{3.24}$$

となることに注意しよう．より一般に，G で生成される正準変換のもとでの関数 F の変化は

$$\begin{aligned}\delta F = a^I\partial_I F &= (\Omega^{-1})^{IJ}\partial_J G\partial_I F \\ &= \{F, G\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

で与えられる．これより，ポアソン括弧がなぜ重要であるかがわかる．つまり，変数の変換が正準である限り，その変化量は，変数と変換の母関数とのポアソン括弧で与えられる．

つぎに，重要な正準変換のいくつかについて，その母関数を与えよう．

1. $\varphi_r(\boldsymbol{x})$ **の変化.**

変換 $\varphi_r \to \varphi_r + a_r(\boldsymbol{x})$, $\pi_r \to \pi_r$ の母関数は

$$G = \int_V d^3x\ a_r(\boldsymbol{x})\pi_r(\boldsymbol{x}) \tag{3.26}$$

である．

2. $\pi_r(\boldsymbol{x})$ **の変化.**

変換 $\varphi_r \to \varphi_r$, $\pi_r \to \pi_r + a_r(\boldsymbol{x})$ についての母関数は

$$G = -\int_V d^3x\ a_r(\boldsymbol{x})\varphi_r(\boldsymbol{x}) \tag{3.27}$$

である．

3. 空間並進.

並進変換 $x^i \to x^i + a^i$（a^i は定数）に対して，$\delta\varphi_r = a^i\partial_i\varphi_r$, $\delta\pi_r = a^i\partial_i\pi_r$ であり，このとき，

$$G = \int_V d^3x\ a^i\partial_i\varphi_r\pi_r = a^iP_i\,, \tag{3.28}$$

$$P_i = \int_V d^3x \ \partial_i\varphi_r\pi_r \tag{3.29}$$

となる．ここで，空間並進の母関数 P_i は系の運動量である．

4. 時間並進.

時間並進の母関数はハミルトニアン $H(\pi,\varphi)$ である．これはハミルトニアンの定義である．(3.24) から，このことは運動方程式が次の形になることを意味する．

$$\partial_0\varphi_r = \frac{\delta H}{\delta\pi_r}, \qquad \partial_0\pi_r = -\frac{\delta H}{\delta\varphi_r}. \tag{3.30}$$

ここで，

$$H = \int_V d^3x \left(\pi_r\partial_0\varphi_r - \mathcal{L}\right) \tag{3.31}$$

となることが簡単にわかる．これを確かめるには，(3.31) をもちいて作用を

$$\mathcal{S} = \int d^4x \ \pi_r\partial_0\varphi_r - \int dt\, H \tag{3.32}$$

と書き，変分原理をもちいて運動方程式を導けばよい．このようにして求められる運動方程式は (3.30) と一致するので，(3.31) が時間並進の母関数であることが確認できる．

ハミルトニアンと運動量の成分は，次のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ をもちいて表される．

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_r\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\varphi_r)} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L} + \partial^\alpha B_{\alpha\mu\nu}. \tag{3.33}$$

ここで，$B_{\alpha\mu\nu}$ はスピンの寄与に関係するテンソルである．（これについては，本章の後半で議論する．）$T_{\mu\nu}$ をもちいると，

$$P_\mu = (H, P_i) = \int_V d^3x\, T_{\mu 0} \tag{3.34}$$

を得る．テンソル $B_{\alpha\mu\nu}$ は P_μ の形に寄与しないことに注意しよう．

5. ローレンツ変換.

ローレンツ変換は $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu$ で表される．その母関数は

$$M_{\mu\nu} = \int_V d^3x \left(x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}\right) \tag{3.35}$$

であることが確かめられる．

3.2 量子化の規則

量子力学の場合と同様に，状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトル（実際には半直線 (ray)）によって表現される．スカラー積 $\langle\varphi|\alpha\rangle = \Psi_\alpha[\varphi]$ は φ の対角化表示における状態 $|\alpha\rangle$ の波動関数である．これは，状態 $|\alpha\rangle$ において場の配位 $\varphi(\boldsymbol{x})$ を見出す確率振幅を与える．

観測量は $\mathcal{H}$ 上の線形エルミート演算子によって表される．一般に，場は $\mathcal{H}$ 上の線形演算子であるが，必ずしも常にエルミートあるいは観測量であるとは限らない．ここで，$\phi_r(\boldsymbol{x},t)$ を $\varphi_r(\boldsymbol{x},t)$ に対応する演算子とし，また $\pi_r(\boldsymbol{x},t)$ を正準運動量に対応する演算子とする．

ヒルベルト空間の無限小ユニタリー変換のもとで，演算子 F は

$$i\,\delta F = FG - GF = [F,G] \tag{3.36}$$

だけ変化する．ここで G は変換の生成子であり，エルミート演算子で与えられる．もしいきなり量子論から始めたとするならば，上式が量子論の基礎的な出発点であるとみなせる．これより，観測量が線形エルミート演算子であることがわかる．なぜなら，観測量あるいは観測そのものがヒルベルト空間の無限小ユニタリー変換に対応しているからである．

しかし，古典論から始めてその理論を量子化する際には，演算子の構造を古典的な相空間の構造に関係づける規則が必要となる．古典論から量子論へ移る際の基本法則を標語的に書くと「**正準変換はヒルベルト空間上でのユニタリー変換として表現されなければならない**」となる．ユニタリー変換の生成子は，古典的な正準母関数に現れる場を対応する演算子で置き換えることによって得られる．（この置き換えの規則は演算子の順序についての任意性をもつ．例えば，古典的には $\pi_r\varphi_r$ と $\varphi_r\pi_r$ は同じであるが，量子論においては ϕ_r と π_r は必ずしも交換しないので $\pi_r\phi_r$ と $\phi_r\pi_r$ は同じではない．演算子の正しい順序は量子論における望ましい対称性に基づいて理解されることがあるが，その一般的な規則は存在しない．）

正準変換のもとでの関数の変換則 (3.25) をユニタリー変換のもとでの演算子の変換則 (3.36) と比較すると，$-i[F,G]$ は古典極限でポアソン括弧 $\{F,G\}$ として振る舞うことがわかる．したがって，演算子の交換関係は，前述の順

序の問題を別にすれば，対応する古典的関数のポアソン括弧と代数的に同じになる．

(3.36) を有限な形で書くと

$$F' = e^{iG} F \, e^{-iG} \tag{3.37}$$

となる．また，状態の変換則は

$$|\alpha'\rangle = e^{iG} |\alpha\rangle \tag{3.38}$$

で与えられる．式 (3.37) と (3.38) より，古典的な正準変換は量子論ではユニタリー変換によって実現されることがわかる．

(3.36) から (3.38) の式をもちいると，多くのことがわかる．例えば，φ_r と π_r の変化に対する母関数 (3.26), (3.27) に (3.36) を適用すると，

$$\begin{aligned} &[\phi_r(\boldsymbol{x}, t), \phi_s(\boldsymbol{x}', t)] = 0, \\ &[\pi_r(\boldsymbol{x}, t), \pi_s(\boldsymbol{x}', t)] = 0, \\ &[\phi_r(\boldsymbol{x}, t), \pi_s(\boldsymbol{x}', t)] = i \, \delta_{rs} \, \delta^{(3)}(x - x') \end{aligned} \tag{3.39}$$

を得る．これらは理論の演算子に課せられる基礎的な交換関係であり，正準交換関係と呼ばれる．(より一般には，$[\xi^i(\boldsymbol{x}, t), \xi^j(\boldsymbol{x}', t)] = i(\Omega^{-1})^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ となる.)

また，時間並進の生成子はハミルトニアンであり，(3.36) から

$$i \frac{\partial F}{\partial t} = [F, H] \tag{3.40}$$

がわかる．これは量子論の運動方程式であり，ハイゼンベルクの運動方程式と呼ばれる．

正準交換関係をもちいると，さまざまな演算子の交換関係を計算することができる．例えば，(3.34) と (3.35) において場とその正準運動量をそれぞれ演算子で置き換えると，演算子 P_μ, $M_{\mu\nu}$ を得るのだが，これらは，(3.36) にあるように，量子論における任意の物理量についてのポアンカレ変換を与える．特に，正準交換関係をもちいると，これらの演算子は付録にあるポアンカレ代数の交換関係をみたすことが確かめられる．

3.3　自由スカラー場の量子化

つぎに，量子化の規則を自由スカラー場 φ の理論に適用してみよう．ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right] \tag{3.41}$$

で与えられる．量子論において，場は演算子 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ となる．正準運動量は $\pi(\boldsymbol{x},t) = \partial_0\phi(\boldsymbol{x},t)$ である．また，ハミルトニアンは

$$H = \int d^3x\ \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{3.42}$$

となる．基本的な交換関係は

$$\begin{aligned}
&[\phi(\boldsymbol{x},t), \phi(\boldsymbol{x}',t)] = 0,\\
&[\pi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = 0,\\
&[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta^{(3)}(x - x')
\end{aligned} \tag{3.43}$$

で与えられる．ハイゼンベルクの運動方程式は (3.42), (3.43) をもちいて

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{3.44}$$

となる．よって，場の演算子はクライン–ゴルドン方程式に従う．

演算子 ϕ はそれ自身と交換するので，次のような ϕ の対角化表示を選ぶことができる．

$$\phi|\varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{x})|\varphi\rangle. \tag{3.45}$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は c 数による場の配位であり，$\phi(\boldsymbol{x},t)$ の固有値に当たる．このとき，$\pi(\boldsymbol{x}) = -i\delta/\delta\varphi(\boldsymbol{x})$ である．これはシュレーディンガー表示と類似している．実際，いまの場合は汎関数の微分方程式で表されるシュレーディンガー方程式を書き出し，これをハミルトニアンの固有状態について解くことで，理論を理解することができる．しかし，ハミルトニアンの対角化を行うには，運動方程式 (3.44) の解を使った表示法をもちいるほうが簡単である．(ここでは，明らかに，演算子が時間発展するハイゼンベルク表示がもちいられている．) この運動方程式は平面波の解をもつ．よって，1 章で行った規格化を選ぶと，(3.44) の一般解は

$$\phi(x) = \sum_k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)] \tag{3.46}$$

と書ける．ただし，

$$u_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{3.47}$$

$(\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2})$ である．（ここで，u_k, u_k^* は運動方程式の一般解を展開した際のモード関数にすぎないことに注意しよう.）展開係数 a_k, $a_k^\dagger$ を演算子と解釈すれば，$\phi(x)$ が演算子となることがわかる．古典的な場は実数で与えられるので，場の演算子はエルミートである必要がある．よって，(3.46) における $u_k^*(x)$ の係数は a_k のエルミート共役でなければならないことに注意しよう．$u_k(x)$, $u_k^*(x)$ の直交性をもちいると，

$$a_k = \int d^3x\, u_k^*(x)(\omega_k\phi + i\pi)\,, \quad a_k^\dagger = \int d^3x\, u_k(x)(\omega_k\phi - i\pi) \tag{3.48}$$

を得る．上式と基本交換関係 (3.43) をもちいると，a_k, $a_k^\dagger$ の交換関係は

$$\begin{aligned} \left[a_k, a_l\right] &= 0, \\ \left[a_k^\dagger, a_l^\dagger\right] &= 0, \\ \left[a_k, a_l^\dagger\right] &= \delta_{kl} \end{aligned} \tag{3.49}$$

となる．a_k, $a_k^\dagger$ の交換関係は生成消滅演算子の交換関係と同じである．これらの関係式は，2 章で行った多粒子状態の考察からも得られた．ここでは，力学的自由度である場 $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ に対する量子化の基本法則としてこれらの交換関係が導かれている．

正準運動量 π のモード展開は，ϕ のモード展開 (3.46) をもちいて $\partial_0\phi$ として得られる．よって，ハミルトニアンは

$$H = \sum_k \frac{1}{2}\omega_k(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) = \sum_k \left(\omega_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\omega_k\right) \tag{3.50}$$

と計算できる．同様に，運動量演算子は

$$P_i \equiv \int \partial_i\phi\pi = \sum_k \frac{1}{2}k_i(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) = \sum_k k_i a_k^\dagger a_k \tag{3.51}$$

となる.（ここで上記の交換関係と $\sum_k k_i = 0$ をもちいた．厳密には，これら

の式は正則化された和で定義されなければならない．これは，あるモード N までの部分和を定義し，最終的に $N \to \infty$ の極限をとることで実行される．また，運動量演算子については，$\boldsymbol{k}$ と $-\boldsymbol{k}$ の寄与がそれぞれ相殺するという鏡像対称性をもちいて正則化を行った．）

ここで，これらの結果について解釈してみよう．定数項 $\frac{1}{2}\omega_k$ を除くと，ハミルトニアンは正の演算子 $a^\dagger a$ で与えられる．これは，$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \sum_\beta \langle\alpha|a^\dagger|\beta\rangle\langle\beta|a|\alpha\rangle = \sum_\beta |\langle\beta|a|\alpha\rangle|^2 \geq 0$ からわかる．この値がゼロとなるのは，$a|\alpha\rangle = 0$ となる状態に対してだけである．したがって，$|0\rangle$ で表される真空状態と同定される最低エネルギー状態は

$$a_k|0\rangle = 0 \tag{3.52}$$

と定義される．これより，真空状態は $\sum_k \frac{1}{2}\omega_k$ のエネルギーをもつことがわかる．これは，真空エネルギーに寄与する（無限の値をとる）定数であり，前述したように演算子の順序が一意的でないことに起因する．古典的には $a_k^\dagger a_k$ と $\frac{1}{2}(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)$ の間に違いはない．しかし量子的には，真空エネルギーがゼロとなるような正しい演算子は $\omega_k a_k^\dagger a_k$ の形でなければならない．このことは，真空のローレンツ不変性をもちいて次のように理解できる．まず，演算子 P_μ, $M_{\mu\nu}$ はポアンカレ代数に従う．特に，次の交換関係

$$[K_i, P_j] = i\,\delta_{ij} H \tag{3.53}$$

が成り立つ．ここで，$K_i = M_{0i}$ はローレンツ・ブーストの演算子である[1]．ローレンツ変換のユニタリー表現が存在し，真空状態がローレンツ変換のもとで不変である場合には，観測者によって空間の見え方が変わらず，$K_i|0\rangle = 0$, $\langle 0|K_i = 0$ となる．このとき，(3.53) の真空期待値から $\langle 0|H|0\rangle = 0$ となることがわかる．これは $H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$ が正しい形であることを意味する．したがって，いまの場合，真空にローレンツ不変性を要請することによって演算子の正しい順序が導かれる．運動量についても同様の議論を行うことができ，その正しい形は $P_i = \sum_k k_i a_k^\dagger a_k$ となる．（相対論的な場の理論において，真空にローレンツ不変性を要請することは物理的に妥当である．ローレ

1　［訳註］ポアンカレ代数については付録を参照されたい．

ンツ不変性がない状況 —— 例えば，金属表面上の特別な実験環境，または重力が強く作用する物体の近傍などミンコフスキー空間が平坦でない場所 —— では，真空のエネルギー，あるいはより正確には，基底状態のエネルギーは重要であり，カシミール効果やホーキング輻射などの物理的効果を導く.）以下では，演算子が正しく順序づけられた形 $H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$, $P_i = \sum_k k_i a_k^\dagger a_k$ を考えることにしよう.

真空状態では $H|0\rangle = 0$, $P_i|0\rangle = 0$ となる．ここで，状態 $a_k^\dagger|0\rangle$ を考えると，

$$H\, a_k^\dagger|0\rangle = \omega_k\, a_k^\dagger|0\rangle, \quad P_i\, a_k^\dagger|0\rangle = k_i\, a_k^\dagger|0\rangle \tag{3.54}$$

となる．この状態は運動量 k_i とエネルギー $\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ をもつ．このエネルギーと運動量の関係は質量 m の相対論的粒子に期待されるものである．よって，$a_k^\dagger|0\rangle$ は運動量 k_i の1粒子状態と同定できる．多粒子状態はいくつかの $a^\dagger$ を真空状態に施すことにより得られる．状態

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots\rangle = \frac{(a_{k_1}^\dagger)^{n_{k_1}}}{\sqrt{n_{k_1}!}} \frac{(a_{k_2}^\dagger)^{n_{k_2}}}{\sqrt{n_{k_2}!}} \cdots |0\rangle \tag{3.55}$$

への H と P_i の作用を計算すると，この状態が運動量 $\boldsymbol{k}_1$（および対応するエネルギー）をもつ粒子 n_{k_1} 個，運動量 $\boldsymbol{k}_2$ をもつ粒子 n_{k_2} 個，等々，といった多粒子状態であることがわかる．$\sqrt{n_k!}$ は規格化に必要な因子である．この状態の角運動量も同様に計算でき，これらの粒子がスピン0粒子であることを示せる．多粒子状態 (3.55) は完全なヒルベルト空間を与える．この場合，つまりすべての状態が真空状態に生成演算子を施すことで構成されるとき，そのヒルベルト空間はフォック空間とも呼ばれる.

N 体の状態に対する N 粒子の波動関数は，規格化因子を除くと，

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)|N\rangle \tag{3.56}$$

と定義される．ここで，$|N\rangle$ は (3.55) のような N 粒子状態である．1粒子状態と2粒子状態については，

$$\Psi(x) = u_k(x), \quad \Psi(x_1, x_2) = u_{k_1}(x_1)u_{k_2}(x_2) + u_{k_2}(x_1)u_{k_1}(x_2) \tag{3.57}$$

となる．a_k が互いに交換するので，2粒子の波動関数は粒子の交換について対称性をもつ．これは，スカラー場によって記述される粒子がボソンである

ことを示している.

以上をまとめると，ここではスカラー場の量子化を通して，スピン 0 ボソンの記述を得た．また，場そのものを基本的な力学変数とみなすことにより，多粒子的な理論を再現した．これは，多粒子的なアプローチから場の演算子を構成したことと相互補完的な関係にある.

3.4 ディラック場の量子化

ディラック場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi \tag{3.58}$$

である．ψ と正準共役な運動量は

$$\pi = i\psi^\dagger \tag{3.59}$$

で与えられる．交換関係は $[\psi(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(\boldsymbol{x}')] = \delta^{(3)}(x - x')$ の形になると予想されるが，すぐにわかるように，ディラック理論に対しては反交換関係をもちいなければならない.

ハミルトン演算子は

$$H = \int d^3x \; \psi^\dagger (i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi \tag{3.60}$$

で与えられる．ディラック方程式の平面波解についての議論から，一般解は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[a_{p,r} u_r(p) e^{-ipx} + c_{p,r} v_r(p) e^{ipx}\right], \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[a^\dagger_{p,r} \bar{u}_r(p) e^{ipx} + c^\dagger_{p,r} \bar{v}_r(p) e^{-ipx}\right]\end{aligned} \tag{3.61}$$

と表せる．ここで，$E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ である.（フェルミ粒子においては ω_p ではなく E_p をもちいる慣習に従った.）式 (3.61) の規格化因子は，後での変形を簡素にするために選ばれたものである．平面波展開の係数，つまり $a_{p,r}$, $a^\dagger_{p,r}$, $c_{p,r}$, $c^\dagger_{p,r}$ は量子論の演算子である．この展開式と 1 章で与えられたスピノール u と v の正規直交性をもちいると,

$$H = \sum_{p,r} E_p (a^\dagger_{p,r} a_{p,r} - c^\dagger_{p,r} c_{p,r}) \tag{3.62}$$

を得る．

ψ, $\psi^\dagger$ に対して正準交換関係をもちいると，a, $a^\dagger$ と c, $c^\dagger$ は生成消滅演算子の交換関係に従うことがわかる．しかし，(3.62) はこの交換関係をもちいると困難が生じることを示している．このとき，ハミルトニアンは正とならない．つまり，負のエネルギーをもつ状態が存在する．これを回避するには，反交換関係をもちいればよい．まず，

$$c_{p,r} = b^\dagger_{p,r}, \quad c^\dagger_{p,r} = b_{p,r} \tag{3.63}$$

と再定義しよう．さらに，反交換関係 $b^\dagger_{p,r} b_{k,s} + b_{k,s} b^\dagger_{p,r} = \delta_{rs}\delta_{p,k}$ を仮定すると，ハミルトニアンは

$$H = \sum_{p,r} E_p (a^\dagger_{p,r} a_{p,r} + b^\dagger_{p,r} b_{p,r}) - \sum_p 2E_p \tag{3.64}$$

と書ける．第2項の符号が変化するのは反交換関係による．(場 ψ, $\bar{\psi}$ にはそれぞれ $a_{p,r}$, $c_{p,r}$ と $a^\dagger_{p,r}$, $c^\dagger_{p,r}$ についての和が現れるので，場の交換関係が多様な物理的要請と無矛盾であるためには，$a_{p,r}$, $a^\dagger_{p,r}$ も反交換関係をもたなければならない.）ここで，真空状態を $a_{p,r}|0\rangle = b_{p,r}|0\rangle = 0$ で定義しよう．真空エネルギー（あるいはゼロ点エネルギー）$-\sum_p 2E_p$ はスカラー場のときと反対の符号をもつ．各モードの強さは実際には同じであり，正のエネルギー解をもつ2つのスピン状態，および負のエネルギー解をもつ2つのスピン状態のそれぞれが $\frac{1}{2}E_p$ だけの寄与をもつ．以前と同様に真空のローレンツ不変性を保つために，真空エネルギーを差し引いてハミルトニアンを再定義すると，ハミルトニアンは

$$H = \sum_{p,r} E_p (a^\dagger_{p,r} a_{p,r} + b^\dagger_{p,r} b_{p,r}) \tag{3.65}$$

と補正される．$a_{p,r}, b_{p,r}$ を消滅演算子と解釈し，真空を $a_{p,r}|0\rangle = b_{p,r}|0\rangle = 0$ で定義すると，上式から H は常に正であることがわかる．

反交換関係は次のように構成される．

$$\{\psi(\boldsymbol{x}, t), \psi(\boldsymbol{x}', t)\} = 0,$$

$$\{\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)\}=0,\tag{3.66}$$
$$\{\psi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)\}=i\,\delta^{(3)}(x-x')\,\mathbf{1}.$$

ここで，標準的な省略記号 $AB+BA=\{A,B\}$ をもちいた.（上式では，スピノールの添え字は明示的でない．例えば，右辺の $\mathbf{1}$ はスピノールの添え字について恒等的であることを意味する．また，π は $i\psi^\dagger$ であるので，これらの反交換関係は ψ, $\psi^\dagger$ で書き換えられる.）場のモード展開をもちいると，演算子 a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ に関する反交換関係

$$\begin{aligned}\{a_{p,r},a_{k,s}\}&=\{a_{p,r},b_{k,s}\}=0,\\ \{a_{p,r},b^\dagger_{k,s}\}&=\{a^\dagger_{p,r},b_{k,s}\}=0,\end{aligned}\tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\{a_{p,r},a^\dagger_{k,s}\}&=\delta_{rs}\delta_{p,k},\\ \{b_{p,r},b^\dagger_{k,s}\}&=\delta_{rs}\delta_{p,k}\end{aligned}\tag{3.68}$$

を求めることができる．ここには示していないが，関係式 (3.67) のエルミート共役も同様に成り立つ．これらの関係式は，フェルミオン場の演算子を構成した 2 章で得られた結果と同じである．

運動量演算子は

$$P_i=\int d^3x\ \psi^\dagger(-i\,\partial_i)\psi=\sum_{p,r}p_i\left[a^\dagger_{p,r}a_{p,r}+b^\dagger_{p,r}b_{p,r}\right]\tag{3.69}$$

と計算される．また，電荷あるいはフェルミオン数の演算子は

$$Q=\int d^3x\ \psi^\dagger\psi=\sum_{p,r}\left[a^\dagger_{p,r}a_{p,r}-b^\dagger_{p,r}b_{p,r}\right]\tag{3.70}$$

で定義される.（演算子の順序は，Q が真空でゼロとなるように選ばれている.）

ここで，ディラック場の状態について考えてみよう．真空 $|0\rangle$ のエネルギー，運動量，および電荷はゼロである．その次の状態は $a^\dagger_{p,r}|0\rangle$ と $b^\dagger_{p,r}|0\rangle$ である．これらはエネルギー E_p と運動量 p_i をもつ．$E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ なので，これらは運動量 p_i，質量 m の 1 粒子状態と解釈できる．添え字 r はスピン状態を表す．これらはスピン $\frac{1}{2}$ の粒子である．1 章では，1 粒子の波動関数をもちいてこの状態を考えた．1 章での議論は，$\langle 0|\psi(x)a^\dagger_{p,r}|0\rangle$ と $\langle 0|\bar{\psi}(x)b^\dagger_{p,r}|0\rangle$ が 1 粒子の波動関数であることに注意すると，ここでも成り立つ．この結果

は，角運動量を直接計算することでも確認できる．状態 $a^\dagger_{p,r}|0\rangle$, $b^\dagger_{p,r}|0\rangle$ はそれぞれ +1,−1 の電荷をもつ．したがって，これらは粒子とその反粒子の状態であると解釈できる．明らかに，$a^\dagger_{p,r}$ は粒子の生成演算子であり，$b^\dagger_{p,r}$ は反粒子の生成演算子である．これらのエルミート共役は，それぞれ対応する消滅演算子となる．

多粒子状態は，真空状態にいくつかの生成演算子を施すことで得られる．反交換関係から，$a^\dagger_{p,r}a^\dagger_{p,r} = 0$ となる．よって，p, r の各値について2粒子以上の状態は存在しない．つまり，排他律が成り立つ．また2粒子の波動関数は

$$\begin{aligned}\Psi_{p,r;k,s}(x_1,x_2) &= \langle 0|\psi(x_1)\psi(x_2)|p,r;k,s\rangle \\ &= -\sqrt{\frac{m}{E_pV}\frac{m}{E_kV}}\left(e^{-ipx_1}e^{-ikx_2} - e^{-ipx_2}e^{-ikx_1}\right)u_r(p)u_s(k) \quad (3.71)\end{aligned}$$

で与えられることがわかる．これは，粒子の交換のもとで反対称である．以上2つの結果から，ディラック場はフェルミ粒子を記述することがわかる．

反交換関係は負のエネルギー状態を避けるために必要であった．このことがどのように量子論の一般的な概念，つまり観測量がユニタリー変換の生成子であること，と関係しているのか疑問に思われるかもしれない．というのも，量子論において無限小のユニタリー変換は交換関係を導くからである．

そこで，例えばハイゼンベルクの運動方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi, H] \quad (3.72)$$

を考えてみよう．ハミルトニアンは $\psi^\dagger h\psi$ $(h = i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)$ の形をもつ．ここで，交換関係 $[A, BC]$ は次のように2とおりに書けることに注目しよう．つまり，ボソンの理論で便利な $[A,B]C + B[A,C]$ の形，あるいは基本的な関係が反交換関係であるフェルミオンの理論で便利な $\{A,B\}C - B\{A,C\}$ の形に書ける．したがって，基本的な場の変数について2乗（一般には偶数乗）の演算子であれば交換関係をもちいることができる．よって，フェルミオン場の演算子の偶数乗で表されるエルミート演算子は，量子論においてユニタリー変換を生成する．すべての観測量がフェルミオン場の演算子の偶数乗で表されることを要請すれば，量子論として整合性をもつ．よって，この条件のもとでフェルミオンの量子化は一般的な量子化の規則 (3.36) と無矛盾である．

スピノール場は反交換関係で量子化されなければならない．これは，正のハミルトニアンを得るためには，フェルミオンが排他律に従わなければならないからであった．これは，より一般的な**スピン統計定理**の特別な場合である．この定理によると，以下が成り立つ．

1. 半奇数スピンの場あるいはスピノールを交換関係をもちいて量子化すると，負のエネルギーをもつ状態が現れる．
2. 整数スピンの場を反交換関係をもちいて量子化すると，負のノルムをもつ状態が現れる．したがって，これは確率的な解釈と矛盾する．あるいは，別の見方をすると，ローレンツ共変性がそこなわれる．

このためスピン $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ の粒子はフェルミオン，スピン $0, 1, 2, \ldots$ の粒子はボソンでなければならない．この結果は，もともと相対論において証明されたものであるが，その後，長年にわたり改良されている．最近では，このようなスピン統計定理を一般的なトポロジカルな議論と反粒子の存在だけをもとにして証明しようとする試みがある．

3.5 対称性と保存則

古典場の理論の対称性とは，ラグランジアンが高々全微分項で変化するような変換 $\varphi \to \varphi'$ のことである．積分をとると，全微分項は作用の表面項になるので，運動方程式は変化しない．全微分項を付加する自由度を除いてラグランジアンを保存することは，運動方程式の対称性を得るには十分であるが必要な条件ではない．実際，運動方程式の対称性が（全微分項の自由度を除いた）ラグランジアンの対称性とならない場合が存在する．その最も簡単な例は，非相対論的な自由粒子の運動で与えられ，これは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}, \\
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

で記述される．これより，任意の線形変換 $x^i \to M^i_j x^j$（M は可逆な定行列）は運動方程式の対称性であるが，M が直交つまり $M^T M = 1$ である場合に

だけ，ラグランジアンが保存されることがわかる．ただし，量子化することを考えると，正準変換で与えられる対称性だけが興味の対象となる．そのような対称性は全微分項を付け加える自由度を除いてラグランジアンを保存する．

物理にはパリティや時間反転といった興味深い離散的対称性が存在するが，ここではそれらについての議論はひとまずおいて，連続的な対称性について考えよう．連続的な対称性のもとでの場の変化は，連続的なパラメータで与えられる．(ここでは大域的な対称性を考えるので，パラメータは時空間に依存しない定数である．パラメータが時空間に依存する局所的な対称性に関しては，ゲージ理論を扱う10章で議論する.）連続的な対称性のもとでは，恒等変換の近傍にある無限小変換を考えることができる．つまり，$\varphi_r \to \varphi'_r = \varphi_r + \epsilon^A \tilde{\varphi}_{Ar}$ と書ける．ϵ^A は変換の無限小パラメータであり，$\tilde{\varphi}_{Ar}$ は φ_r の変化量によって定義される．この変換が対称性であることから，ある K^μ_A をもちいて，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\epsilon^A K^\mu_A) \tag{3.74}$$

と表されなければならない．

一般的な変化 $\varphi_r \to \varphi_r + \delta\varphi_r$ を考えてみよう．このとき，

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\right]\delta\varphi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta\varphi_r\right) \tag{3.75}$$

となる．ここで，対称性の変換に関連するカレントを

$$J^\mu_A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\tilde{\varphi}_{Ar} - K^\mu_A \tag{3.76}$$

で定義する．この対称性に対して，(3.74) と (3.76) をもちいると，(3.75) は

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\right]\delta\varphi_r + \epsilon^A\partial_\mu J^\mu_A = 0 \tag{3.77}$$

と書ける．これより，古典的な軌道上で J^μ_A は保存することがわかる．つまり，場が運動方程式をみたすとき，$\partial_\mu J^\mu_A = 0$ となる．場の配位が運動方程式をみたさない場合でも (3.76) はカレント J^μ_A を定義することに注意しよう．

以上より，理論の連続的な対称性のそれぞれに対して，運動方程式で与えられる場の時間発展のもとで保存するカレントがあることがわかった．この結果は，ネーターの定理として知られている．

$\partial_\mu J^\mu_A = 0$ を全空間で積分すると，電荷

$$Q_A = \int d^3x\, J_A^0 \tag{3.78}$$

が保存することがわかる．つまり，$\frac{dQ}{dt} = 0$ である．(これは表面項 $\oint \boldsymbol{J_A} \cdot \boldsymbol{dS}$ が空間的境界上でゼロであるときに成り立つ．もしこれがゼロでなければ，この表面項は考えている空間領域から電荷がわき出す割合を与える．)

つぎに，これまでの結果を具体例で考えてみよう．

1．複素スカラー場．

次のラグランジアンをもつ複素スカラー場 φ を考えよう．

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{3.79}$$

変換 $\varphi \to \varphi' = e^{i\theta}\varphi$ は明らかに対称性である．つまり，定数 θ に対して $\mathcal{L}(\varphi') = \mathcal{L}(\varphi)$ となる．したがって，

$$\delta\varphi = i\theta\varphi, \quad \delta\varphi^* = -i\theta\varphi^*, \quad K^\mu = 0 \tag{3.80}$$

となり，カレントは

$$J^\mu = -i\left[\varphi^*(\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \varphi^*)\varphi\right] \tag{3.81}$$

で与えられる．運動方程式をもちいると，カレントが保存することを簡単に確かめることができる．電荷は

$$Q = -i \int d^3x\, (\varphi^* \pi^* - \pi\varphi) \tag{3.82}$$

で与えられる．ここで，π と π^* はそれぞれ φ と φ^* の正準運動量である．θQ は対称性変換の生成子である．つまり，ϕ, ϕ^* とその正準運動量で作られた任意の演算子 F に対して，

$$i\delta F = [F, \theta Q] \tag{3.83}$$

が成り立つ．

2．ディラック場．

次のラグランジアンをもつディラック理論を考えよう．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi. \tag{3.84}$$

このとき変換 $\psi \to \psi' = e^{-i\theta}\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{i\theta}\bar{\psi}$ は対称性であり，$\mathcal{L}(\psi', \bar{\psi}') = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi})$ となる．カレントは

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.85}$$

で与えられる．対応する電荷は

$$Q = \int d^3x\ \psi^\dagger\psi \tag{3.86}$$

である．この電荷は前節で導入したディラック粒子に対するフェルミオン数の演算子と同じである．場の反交換関係から

$$[\psi(\boldsymbol{x}, t), \theta Q] = \theta\psi(\boldsymbol{x}, t), \quad [\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, t), \theta Q] = -\bar{\psi}\theta \tag{3.87}$$

を得る．これより，θQ が変換 $\psi \to e^{-i\theta}\psi, \bar{\psi} \to e^{i\theta}\bar{\psi}$ の生成子であることがわかる．

3.6 エネルギー運動量テンソル

上の例で考えた対称性はラグランジアンを不変に保つ．一般に，時空間の対称性の場合，ラグランジアンは全微分項だけ変化する．つまり，ゼロでない K_A^μ が存在する．ここで興味のある時空間の対称性は並進変換とローレンツ変換であり，これらはエネルギー，運動量，そして角運動量の保存則を導く．以下では，カレントの公式を使わずに，もう一度これらの保存則を導いてみよう．

まず，変換 $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ を考える．ただし，$\xi^\mu = a^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu$ は a^μ による一定の並進変換とパラメータ $\omega^{\mu\nu}$ による無限小ローレンツ変換に対応している．つまり，ベクトル ξ^μ は $\partial_\mu\xi^\mu = 0$ をみたす．場の変化は

$$\begin{aligned}\delta\varphi_r &= \xi^\mu\partial_\mu\varphi_r - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu}\varphi)_r, \\ \delta\partial_\mu\varphi_r &= \xi^\mu\partial_\mu\varphi_r + \partial_\mu\xi^\nu\partial_\nu\varphi_r - \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta}\varphi)_r\end{aligned} \tag{3.88}$$

で与えられる．ここで，$S_{\mu\nu}$ はスピン行列で，その具体的な形は1章で与えられている．また，スピン $\frac{1}{2}$ とスピン1の場合については付録で与えられている．(3.88) において，このスピン行列は場 φ_r が属するローレンツ群の表

現で表されていると理解される.

ラグランジアンは x^μ のスカラー関数である. よって, $\mathcal{L}$ の変化は

$$\delta\mathcal{L} = \xi^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L}) \tag{3.89}$$

で与えられる. ラグランジアンそのものは座標に陽に依存しない. x^μ 依存性は場とその微分に現れる. よって, (3.75) と同様に

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{E}_r \delta\varphi_r + \partial_\nu \left(\delta\varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_r)} \right), \tag{3.90}$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_r)} \right) \tag{3.91}$$

と書ける. 式 (3.88)–(3.91) を組み合わせると,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\left(\xi^\mu \partial_\mu \varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_r)} \right) - \xi^\nu \mathcal{L} - \frac{i}{2}(\omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \varphi)_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_r)} \right] = -\mathcal{E}_r \delta\varphi_r \tag{3.92}$$

となる. これより, 場が運動方程式をみたすとき (つまり $\mathcal{E}_r = 0$ のとき), 左辺の大括弧のなかの量は保存することがわかる. 並進変換に対応するカレントは

$$t_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_r)} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{3.93}$$

で与えられる. (これは正確にはエネルギー運動量テンソルではない. ここでは, 小文字をもちいてこのことを示した.) 保存則から $t_{\mu\nu}$ を一意的に定義することはできない. すなわち, $t_{\mu\nu}$ に $\partial^\alpha B_{\mu\alpha\nu}$ のような項を加えることができる. ただし, $B_{\mu\alpha\nu}$ は α と ν について反対称なテンソルである. このような項は保存則に影響しない. 対称性の性質から, 特定の $B_{\mu\alpha\nu}$ を場とその微分の関数として次のように選ぶことができる.

系の 4 元運動量は

$$P_\mu = \int d^3x \; t_{\mu 0} \tag{3.94}$$

で与えられる. (3.92) から, ローレンツ変換に対応するカレントつまり角運動量密度は次のように定義される.

$$\frac{1}{2}\omega^{\mu\alpha} \mathcal{M}_{\mu\alpha\nu} = \omega^{\mu\alpha} \left[x_\alpha t_{\mu\nu} - \frac{i}{2}(S_{\mu\alpha}\varphi)_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_r)} \right]. \tag{3.95}$$

$\omega^{\mu\alpha}$ と $\mathcal{M}_{\mu\alpha\nu}$ の積のみが定義されているので，密度 $\mathcal{M}_{\mu\alpha\nu}$ を同定するには，ある自由度が存在する．そこで，テンソル

$$B_{\mu\alpha\nu} = \frac{i}{2}\left[(S_{\mu\alpha}\varphi)_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_r)} - (S_{\mu\nu}\varphi)_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi_r)} - (S_{\alpha\nu}\varphi)_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\right] \tag{3.96}$$

を定義しよう．$B_{\mu\alpha\nu}$ は α と ν について反対称であることに注意しよう．式(3.95) と無矛盾な角運動量密度は

$$\mathcal{M}_{\mu\alpha\nu} = x_\alpha t_{\mu\nu} - x_\mu t_{\alpha\nu} - (B_{\mu\alpha\nu} - B_{\alpha\mu\nu}) \tag{3.97}$$

と定義される．

ここで，エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \partial^\alpha B_{\mu\alpha\nu} \tag{3.98}$$

で定義される．$B_{\mu\alpha\nu}$ の反対称性と $t_{\mu\nu}$ が保存することから，$T_{\mu\nu}$ も保存することがわかる．さらに，4 元運動量は

$$P_\mu = \int d^3x\, T_{\mu 0} \tag{3.99}$$

と表される．これは，B の項が空間の無限遠で表面積分となり，無限遠でゼロとなる場あるいは適当な周期境界条件をみたす場に対して，この項がゼロとなるためである．また，角運動量密度は

$$\mathcal{M}_{\mu\alpha\nu} = x_\alpha T_{\mu\nu} - x_\mu T_{\alpha\nu} - \partial^\beta(x_\alpha B_{\mu\beta\nu} - x_\mu B_{\alpha\beta\nu}) \tag{3.100}$$

となる．角運動量とブーストの生成子は

$$M_{\mu\alpha} = \int d^3x\, \mathcal{M}_{\mu\alpha 0} = \int d^3x\, (x_\alpha T_{\mu 0} - x_\mu T_{\alpha 0}) \tag{3.101}$$

で与えられる．(3.100) の全微分項は無限遠での表面積分になり，無限遠で十分に速くゼロになる B をもちいると，この全微分項は $M_{\mu\alpha}$ に寄与しない．したがって，角運動量密度を

$$\mathcal{M}_{\mu\alpha\nu} = x_\alpha T_{\mu\nu} - x_\mu T_{\alpha\nu} \tag{3.102}$$

と定義することもできる．

角運動量密度の保存則から，場が運動方程式にみたすとき，$T_{\mu\nu}$ は対称テ

ンソルとなることがわかる．ここでは，この対称性の性質に基づいて，保存則 (3.92) からカレントを定義する際に生じる任意性つまり $B_{\mu\alpha\nu}$ を特定した．このテンソル $B_{\mu\alpha\nu}$ はベリンファンテ・テンソルと呼ばれることがある．また，(3.98) からテンソル $T_{\mu\nu}$ の形を計算する際に，理論によっては $\mathcal{E}_r$ に比例する項が現れる場合がある．古典的には，このような項は明らかに無意味であるが，量子的には，この項を定義する物理的な要請が必要である．このような物理的要請はエネルギー運動量テンソルの繰り込みの処方と関係している．

3.7 電磁場

上のようにエネルギー運動量対称テンソルを構成できるスピンをもつ場の一例として，電磁場がある．場の基本変数はベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ である．場の強さはテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ で与えられる．電場 E_i と磁場 B_i は $E_i = F_{0i}$, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$ で与えられる．ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.103}$$

である．これは

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} &= F^{\alpha\nu}, \\ t_{\mu\nu} &= -\partial_\mu A_\alpha F_\nu^{\ \alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^2 \end{aligned} \tag{3.104}$$

を与える．このとき，ベリンファンテ・テンソルは

$$B_{\mu\alpha\nu} = -A_\mu F_{\alpha\nu} \tag{3.105}$$

で与えられ，エネルギー運動量対称テンソルは

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha}F_\nu^{\ \alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^2 \tag{3.106}$$

となることが簡単にわかる．

3.8 エネルギー運動量テンソルと一般相対論

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が対称テンソルであることをここまでみてきた．スピンをもつ場に対して，これはベリンファンテ項を $t_{\mu\nu}$ に加えることで実現された．この項は，ベクトルやテンソルの成分，あるいは一般にスピンをもつ任意の場の成分を定義する際に必要となる座標系の回転不変性に起因する．さて，一般相対論に現れる一般座標変換は座標回転を含んでいるので，このエネルギー運動量テンソルを別の方法で導くこともできる．まず，作用を一般座標変換のもとで不変であるようにする．それには，計量テンソルを導入して，時空間の添え字を縮約し，不変な積分測度をもちいればよい．この場合，座標系の回転は計量成分の変化によって表される．したがって，作用の変分を計量成分についてとることによって，エネルギー運動量テンソルを求めることができる．具体的には，次の公式

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}d^4x\, T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{3.107}$$

で与えられることが簡単にわかる．ここで，$g = \det(g_{\mu\nu})$ である．また，$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆元，つまり $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$ となる．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は対称テンソルなので，ここで導出されるエネルギー運動量テンソルは自動的に対称テンソルとなり，ベリンファンテ項を付加する手法で求められるエネルギー運動量対称テンソルと一致する．$T_{\mu\nu}$ を特定したのちに，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とすると平坦な時空における結果を求めることができる．作用原理から重力の運動方程式を導出するには，計量について作用の変分をとればよい．したがって，上の公式は，物質場のエネルギー運動量テンソルが重力場の源（ソース (source)）として振る舞うという事実から予想される式でもある．

その一例として，共変化された電磁場の作用

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int \sqrt{-g}\; d^4x\; g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{3.108}$$

を考えよう．ここで，$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ をもちいると，

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\ \alpha} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \\ &\to -F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\ \alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^2 \end{aligned} \tag{3.109}$$

となることがわかる．また，スカラー場に対しても同様に，

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g}\ d^4x\ \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right] \tag{3.110}$$

となり，これは

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right] \tag{3.111}$$

を導く．これらの結果は，より込み入った手法で以前に求めた結果と同じである．

3.9 スカラー場の光錐量子化

シンプレクティック構造 $\Omega_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ がどのように使われるかを示す簡単な例の 1 つに，スカラー場の光錐 (light-cone) 量子化がある．次のラグランジアンで表される実スカラー場 φ を考えよう．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - U(\varphi). \tag{3.112}$$

ただし，$U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi)$ である．

つぎに，(z,t) 方向の光錐に対応する光錐座標

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z+t), \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z-t) \end{aligned} \tag{3.113}$$

を導入しよう．場の時間 t による発展を考える代わりに，光錐座標の 1 つ，例えば u による発展を考えよう．u が一定の超曲面 (hypersurface) は，もう一方の光錐座標 v と光錐を横断する 2 つの座標 $x^T = x, y$ によってパラメータ表示される．軌道は，u が固定された場の配位 $\varphi(u,v,x,y)$，すなわち v,x,y の実関数によって特定される．理論の相空間はこの関数によって構成される．このとき，作用は

$$\mathcal{S} = -\int du\, dv\, d^2x^T\ \left[\partial_u\varphi\partial_v\varphi + \frac{1}{2}(\partial_T\varphi)^2 + U(\varphi)\right] \tag{3.114}$$

と表せる．

正準運動量 π を $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_u \varphi)}$ と素朴に定義すると，$\pi = -\partial_v \varphi$ となるが，これは $\varphi(v, x^T)$ と独立ではない．したがって，このような定義はあまり有用でない．しかし，作用 $\mathcal{S}$ の変分から，正準 1-形式 Θ を

$$\Theta = \int dv\, d^2 x^T (-\partial_v \varphi\, \delta\varphi) \tag{3.115}$$

と定義できる．よって，シンプレクティック 2-形式は

$$\Omega(v, x^T, v', x'^T) = -2\, \partial_v \delta(v - v') \delta^{(2)}(x^T - x'^T) \tag{3.116}$$

となる．このとき，Ω の逆元を求めるために

$$\delta(v - v')\delta^{(2)}(x^T - x'^T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp\left(-ip_u(v - v') - ip^T \cdot (x^T - x'^T)\right) \tag{3.117}$$

と書くと，

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(v, x^T, v', x'^T) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{ip_u} \exp(-ip_u(v - v') - ip^T \cdot (x^T - x'^T)) \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon(v - v')\, \delta^{(2)}(x^T - x'^T) \end{aligned} \tag{3.118}$$

なることがわかる．ここで，$\epsilon(v - v')$ は符号関数であり，$v - v' > 0$ のとき 1 に等しく，$v - v' < 0$ のとき -1 に等しい．

したがって，相空間は次のポアソン括弧をみたす場の配位 $\varphi(v, x^T)$ で与えられる．

$$\{\varphi(u, v, x^T), \varphi(u, v', x'^T)\} = -\frac{1}{4} \epsilon(v - v')\, \delta^{(2)}(x^T - x'^T). \tag{3.119}$$

u 発展に関するハミルトニアンは

$$H = \int dv\, d^2 x^T \left[\frac{1}{2}(\partial_T \varphi)^2 + U(\varphi)\right] \tag{3.120}$$

で与えられる．ハミルトニアンの運動方程式は，ポアソン括弧 (3.119) をもちいて簡単に確認できる．

量子化を実行するには，φ を演算子 ϕ で置き換え，交換関係をポアソン括弧の i 倍で与えてやればよい．

3.10　マクスウェル方程式の共形不変性

並進変換とローレンツ変換（すなわち，ポアンカレ変換）が時空間に関する唯一の対称性ではない．これ以外にも，例えば共形対称性という興味深い対称性が存在する．実際，自由な，あるいは源のないマクスウェル方程式は共形変換について不変である．

ローレンツ変換が興味深いのは，これがミンコフスキー空間の等長変換 (isometry) として出現するためである.（等長変換とキリング方程式については，付録に簡単な議論が与えられている.）無限小変換 $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ のもとで，計量あるいは距離関数

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.121}$$

の変化は

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} + \xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{3.122}$$

で与えられる．キリング方程式は，これをゼロにすることで得られる．ある計量に対して，そのキリング方程式の解は等長変換を与える．ミンコフスキー計量の場合，計量が一定であるのでキリング方程式は

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \tag{3.123}$$

となる．付録に示したように，この一般解は $\xi_\mu = a_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu$ の形で与えられる．つまり，ミンコフスキー空間に関する一般的な等長変換は，並進変換と（回転を含む）ローレンツ変換で与えられる．これらの変換がミンコフスキー時空上の場の理論において重要であるのはこのためである．

共形変換は，スケール因子の自由度を除いて，計量を保存する．つまり，計量テンソルの変化量は λ をスカラーとして $\lambda g_{\mu\nu}$ で与えられる．いまの場合，$ds^2 \to (1+\lambda) ds^2$ である．光線の伝播は $ds^2 = 0$ で与えられ，この条件は共形変換のもとで不変である．このことおよび他の多くの理由から，共形変換は物理においても重要な変換の 1 つである．(3.122) から，共形変換は

$$\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha = \lambda g_{\mu\nu} \tag{3.124}$$

で与えられることがわかる．これは，共形キリング方程式である．ミンコフ

スキー計量の場合，これは

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \lambda \eta_{\mu\nu} \tag{3.125}$$

と変形される．上式と $\eta^{\mu\nu}$ の縮約をとると，$\lambda = \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\mu$ を得る．よって，共形キリング方程式は

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}(\partial_\alpha \xi^\alpha)\, \eta_{\mu\nu} = 0 \tag{3.126}$$

となる．この一般解は

$$\xi_\mu = a_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu + b^\nu (x^2 \eta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu) + \epsilon\, x_\mu \tag{3.127}$$

で与えられる．ここで，$a_\mu, \omega_{\mu\nu}, b^\nu, \epsilon$ は一定のパラメータである．始めの2つのパラメータは，以前のように並進変換とローレンツ変換に対応する．パラメータ b^ν に対応する変換は特別共形変換と呼ばれ，ϵ に対応する変換はディラテイション (dilatation) と呼ばれる．特別共形変換は次のように理解できる．まず，逆座標 $y^\mu = (x^\mu/x^2)$ $(x \neq 0)$ を定義しよう．この無限小変換は $y^\mu \to y^\mu + b^\mu$ で与えられ，これを x^μ で表すと，この変換は特別共形変換になることが簡単に確認できる．

つぎに，座標変換 $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ のもとでの A_μ と $F_{\mu\nu}$ の変化

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \xi^\alpha F_{\alpha\mu} + \partial_\mu (A_\alpha \xi^\alpha), \\ \delta F_{\mu\nu} &= \xi^\alpha \partial_\alpha F_{\mu\nu} + F_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha + F_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha \end{aligned} \tag{3.128}$$

を考えよう．ラグランジアン (3.103) の変化は

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (\mathcal{L}\xi^\mu) - \frac{1}{2} F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha \left[\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}(\partial \cdot \xi)\eta_{\mu\nu} \right] \tag{3.129}$$

で与えられる．共形変換は (3.126) に従うので，ラグランジアンの変化は全微分項になることがわかる．したがって，運動方程式（これは，源のないマクスウェル方程式である）は不変となる．言い換えれば，源のないマクスウェル理論は古典レベルでは共形対称性をもつ．

これらの対称性の保存カレントは，(3.75) をもちいて求められる．$K^\mu = \mathcal{L}\xi^\mu$ であるので，

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \delta\varphi_r \right) - K^\mu = \xi^\alpha \left[-F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} - \mathcal{L}\delta^\mu_\alpha \right] - F^{\mu\nu}\partial_\nu (A \cdot \xi)$$

$$= \xi^\alpha T^\mu_\alpha - F^{\mu\nu}\partial_\nu(A\cdot\xi) \tag{3.130}$$

となる．よって，式 (3.75) は

$$\partial_\mu\left[\xi^\alpha T^\mu_\alpha - F^{\mu\nu}\partial_\nu(A\cdot\xi)\right] \approx 0 \tag{3.131}$$

となる．ここで，記号 $\approx$ は運動方程式がみたされるとき等式が成り立つことを意味する．$F^{\mu\nu}$ の運動方程式をもちいると，$\partial_\mu[F^{\mu\nu}\partial_\nu(A\cdot\xi)] = 0$ が独立に成り立つので，保存則

$$\partial_\mu[\xi^\alpha T^\mu_\alpha] \approx 0 \tag{3.132}$$

が成り立つことに注意しよう．さまざまな変換に対する保存カレントは，(3.127) を $\xi^\alpha T^\mu_\alpha$ に代入し，変換のパラメータ係数をとることによって得られる．例えば，ディラテイションのカレントは

$$J^\mu = x^\alpha T^\mu_\alpha \tag{3.133}$$

で与えられる．

変化量 $\partial_\mu(A\cdot\xi)$ はゲージ変換の形で表されている．これは物理的な場の配位の変化ではないので，ここでの考察に寄与しない．$F^{\mu\nu}\partial_\nu(A\cdot\xi)$ の項がカレントの式から除かれるのはこのためである．また，$g_{\mu\nu} \to (1+\lambda)g_{\mu\nu}$ に対して $\delta\mathcal{S} = 0$ なので，(3.107) と (3.108) から，$T^\mu_\mu = 0$ がわかる．

参考文献

1. 本章で言及したラグランジアンが 2 階以上の時間微分をもつ場合の正準理論は M. Ostrogradskii, Mem. Act. St.Petersburg, **VI 4**, 385 (1850) による．
2. 作用の変分において終時刻での表面項が正準 1-形式を与えるという結果は，本質的には，19 世紀の解析力学の研究で得られた古い結果である．場の量子論の文脈では，これはまたシュウィンガーの作用原理の基礎づけにもなっている．現代的な文献としては，以下を参照されたい．V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press (1990); J. Schwinger, *Phys. Rev.* 82, 914 (1951); C. Črnkovic and E. Witten, in *Three Hundred Years of Gravitation*, S.W. Hawking and W. Israel (eds.), Cambridge University Press (1987); G.J. Zuckerman, in *Mathematical Aspects of String Theory*, S.T. Yau (ed.), World Scientific (1987).
3. 本章では，カシミール効果とホーキング輻射について簡単に触れた．カシミール効果は K.A. Milton, *The Casimir Effect*, World Scientific Pub. Co. (2001)

に詳しく扱われている．

4. ホーキング輻射とその関連事項については V.P. Frolov and I.D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers (1998) で議論されている．

5. もともとのスピン統計定理はパウリによるが，その後多くの人々によって一般化された．相対論的な場の量子論の文脈で，一般的な良書として R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W.A. Benjamin, Inc. (1964) がある．

6. 粒子のスピン統計定理をトポロジカルに理解しようとする試みについては次を参照されたい．R.P. Feynman, "The Reason for Antiparticles" in *Elementary Particles and the Laws of Physics*, Oxford University Press (1987); R.D. Tscheuschner, Int. J. Theor. Phys. **28**, 1269 (1989); A.P. Balachandran *et al.*, Mod. Phys. Lett. **A5**, 1574 (1990). これらはソリトンについてのスピン統計定理に関する初期の研究に関係している．この分野は多くの人々によって研究されており，その一部については上の最後の論文から参照できる．

7. スピン統計定理に関する経路積分をもちいた素晴らしい議論については K. Fujikawa, Int. J. Mod. Phys. **A16**, 4025 (2001) を参照されたい．

8. エネルギー運動量テンソルを対称化する正準的手法については F. Belinfante, Physica **6**, 887 (1939); *ibid.* **7**, 305 (1940) を参照されたい．エネルギー運動量対称テンソルを計量の変分から求める方法は相対論の多くの教科書で議論されている．例えば，S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley Text Books (1972); L. Landau and E.M. Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, 4th edition (1980) を参照されたい．

9. マクスウェル方程式の古典的な共形不変性については，次の論文にまでさかのぼる．E. Cunningham, Proc. Lond. Math. Soc. **8**, 77 (1910); H. Bateman, Proc. Lond. Math. Soc. **8**, 223 (1910).

第4章
交換子と伝播関数

4.1 スカラー場の伝播関数

相互作用について議論するための準備として，まず交換子と伝播関数を計算しよう．

始めに，スカラー場の理論を考えよう．場 $\phi(x)$ のモード展開は

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) \tag{4.1}$$

で与えられる．ただし，

$$u_k = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{4.2}$$

($\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$) である．これより，交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ を直接計算すると，$V \to \infty$ の極限で，

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \sum_{\boldsymbol{k}} u_k(x) u_k^*(y) - u_k^*(x) u_k(y) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．これは

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_C \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \equiv \Delta(x, y) \tag{4.4}$$

と書き換えることができる．ただし，積分経路は図 4.1 のとおりである．式 (4.4) は次のように解釈できる．まず，図に示された複素 k_0 平面の経路に沿っ

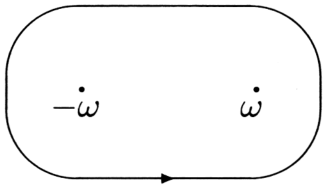


図 4.1　交換子を計算する際の積分経路.

て k_0 積分を行う．この経路は関数 $(k^2-m^2)^{-1}$ の極 $k_0=\pm\omega_k$ を両方とも含む．よって，式 (4.4) は (4.3) を再現することがわかる．

交換子 $\Delta(x,y)$ はローレンツ不変な固有距離 $(x-y)^2$ の関数である．$x^0=y^0$ の場合，同時刻で場は交換するので交換子はゼロとなる．したがって，ローレンツ不変性より，$(x^0,\boldsymbol{x})$, $(x^0,\boldsymbol{y})$ をローレンツ変換したすべての点に対して，交換子はゼロとなる．つまり，空間的に離れた 2 点 x, y, あるいは $(x-y)^2<0$ となる 2 点に対して，交換子はゼロとなる．

$$[\phi(x),\phi(y)]=0\,,\quad (x-y)^2<0. \tag{4.5}$$

ϕ はエルミート演算子であり，観測量とみなせる．空間的に離れている場が交換するので，2 点が空間的に離れていれば，その 2 点において ϕ を不確定性なしに測定できることがわかる．これは，すべての信号でそうであるように，観測過程によって生じる障害は，光速よりも速く伝播できないという事実を反映している．

場の演算子を定義する際に，例えば $\chi(x)=\sum_k a_k u_k(x)$ のように，u_k だけしか使わないとすると，空間的に離れた 2 点 x, y に対して $[\chi(x)+\chi^\dagger(x), i(\chi(y)-\chi^\dagger(y))]=0$ が成り立たないことに注意しよう．したがって，χ と $\chi^\dagger$ のエルミート結合を観測可能量と解釈できず，相対論と矛盾が生じる．このことは，相対性理論において $\phi(x)=\sum_k a_k u_k(x)+a_k^\dagger u_k^*(x)$ が正しい場の演算子を与えることのもう 1 つの理由である．

相互作用を議論するには，クライン–ゴルドン演算子のグリーン関数が重要になる．一般に，このグリーン関数は

$$(\Box+m^2)\,\mathcal{G}(x,y)=-i\delta^{(4)}(x-y) \tag{4.6}$$

で与えられ，その解は

$$\mathcal{G}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2 - m^2}\right)e^{-ik(x-y)} \tag{4.7}$$

と表せる．特異点 $k_0 = \pm\omega_k$ のまわりでどのような積分経路を選ぶかによって，グリーン関数のタイプが決まる．先進グリーン関数と遅延グリーン関数に対する経路は以下のようになる．

まず，遅延型の経路 C_R について考えてみよう．$x^0 > y^0$ のとき，ベキ指数 $e^{-|Imk_0|(x^0-y^0)}$ は下半面の大きな半円からの寄与がないことを保証するので，積分経路は下半面の閉経路で与えられなければならない．よって，遅延グリーン関数 $\mathcal{G}(x,y) = G_R(x,y)$ は

$$G_R(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) & (x^0 > y^0) \\ 0 & (x^0 < y^0) \end{cases} \tag{4.8}$$

となる．すなわち，

$$G_R(x,y) = \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] \tag{4.9}$$

である．ここで，$\theta(x^0 - y^0)$ はステップ関数である．同様の結果が先進グリーン関数 $G_A(x,y) = \theta(y^0 - x^0)\Delta(y,x)$ についても得られる．

もう 1 つの興味ある量として，ファインマンの伝播関数がある．これは

$$G(x,y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \tag{4.10}$$

で定義される．ここで，T で表される時間順序は

$$T\phi(x)\phi(y) = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \tag{4.11}$$

で定義される．記号 T が演算子に作用すると，演算子は，時刻が最新のものが一番左に，その次に最新のものがその右に，などと並べかえられ，時刻が最も古い演算子が一番右にくる．$\phi(x)$ の展開式をもちいると，

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_k \left[\theta(x^0 - y^0)u_k(x)u_k^*(y) + \theta(y^0 - x^0)u_k(y)u_k^*(x)\right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\theta(x^0 - y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{ik(x-y)}\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

となることがわかる．経路積分で表すと，

$$G(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ik(x-y)} \tag{4.13}$$

となる．ここで，積分経路は実軸（および上半面あるいは下半面で適切に閉じた経路）である．ϵ は，最終的に $\epsilon \to 0$ となる微小な正数である．図 4.2 に図示されているように，この微小量は極の位置を上下にずらす役割を果たす．つまり，$x^0 > y^0$ のときには $k_0 = \omega_k$ の極が寄与し，$y^0 > x^0$ のときには $k_0 = -\omega_k$ の極が寄与する．

この伝播関数は方程式

$$(\Box + m^2 - i\epsilon) G(x,y) = -i\delta^{(4)}(x-y) \tag{4.14}$$

に従うので，数学的にはグリーン関数に相当する．$G(x,y)$ は $i(\Box + m^2 - i\epsilon)$ の逆演算子である．

伝播関数は粒子の伝播の振幅として解釈できる．これを見るために，関数 $K(x,y)$ を次のように定義しよう．$x^0 > y^0$ のとき，$K(x,y)$ は時間 $(x^0 - y^0)$ の間に粒子が $\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ へ伝播する振幅を与える．また，$y^0 > x^0$ のときには，時刻 x^0 のほうが前なので，粒子は $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ へ伝播しなければならず，$K(x,y)$ はこの伝播の振幅を与える．量子力学における x の対角化状態をもちいると，これは

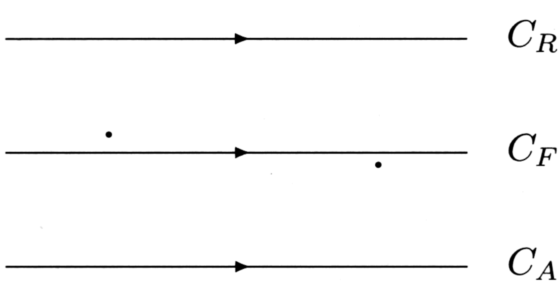


図 4.2　遅延型・先進型のグリーン関数およびファインマンの伝播関数を計算する際の積分経路.

$$K(x,y) = \begin{cases} \langle \boldsymbol{x}, x^0 | \boldsymbol{y}, y^0 \rangle & (x^0 > y^0) \\ \langle \boldsymbol{y}, y^0 | \boldsymbol{x}, x^0 \rangle & (x^0 < y^0) \end{cases} \tag{4.15}$$

と表せる．したがって，

$$K(x,y) = \theta(x^0 - y^0)\langle \boldsymbol{x}| e^{-iH(x^0-y^0)} |\boldsymbol{y}\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle \boldsymbol{y}| e^{-iH(y^0-x^0)} |\boldsymbol{x}\rangle \tag{4.16}$$

となる．相対論的粒子の場合，$H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ である．このとき，1 章の完全性の条件 (1.7) をもちいて，運動量の固有状態 $|k\rangle$ を上式に挿入することができる．ただし，$p|k\rangle = k|k\rangle$, $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{k}\rangle = \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ である．H の固有値は ω_k となるので，上式を計算すると $K(x,y) = G(x,y)$ となることがわかる．

したがって，伝播関数は $x^0 > y^0$ のとき y から x への粒子伝播の確率振幅を与え，$y^0 > x^0$ のときには x から y への粒子伝播の確率振幅を与える関数であると解釈できる．(前述のとおり，場 $\phi(x)$ を定義するには $u_k(x)$ と $u_k^*(x)$ の両方を使わなければならない．これは，空間的に離れた x, y が $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ をみたすという意味で唯一，物理的な組み合わせである．したがって，場 $\phi(x)$ による伝播関数の定義には，$x^0 > y^0$ と $x^0 < y^0$ のどちらの場合も含まれる.）後で見るように，ここで与えた伝播関数の解釈は N 点グリーン関数に一般化することができる．

(4.13) の被積分関数の解析性から，伝播関数の積分経路を k_0 の虚軸に沿うように変形できることがわかる．この変形において，経路は被積分関数の極と交差しない．したがって，

$$G(x,y) = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \tag{4.17}$$

と表せる．ここで，$k_0 = ik_4$ と $x^0 = ix^4$ を導入すると，上式は

$$G(x,y) = G_E(x,y)\Big]_{x^4=-ix^0,\, y^4=-iy^0}, \tag{4.18}$$

$$G_E(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} \right) e^{ik(x-y)} \tag{4.19}$$

と書ける．ここで，積分範囲は k_4 を含めたすべての k の実軸であり，また $k^2 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + k_4^2$, $k(x-y) = \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + k_4(x^4 - y^4)$ である．よって，(4.19) でもちいられる計量は通常のユークリッド計量である．伝播関数は，ユークリッド化されたグリーン関数 $G_E(x,y)$ を虚数値 x^4, y^4 へ解析接続したもの

であると考えられる．$G_E(x,y)$ は方程式

$$(-\Box_E + m^2)G_E(x,y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{4.20}$$

に従う．よって，$G_E(x,y)$ は $(-\Box_E + m^2)$ の逆演算子である．

ここで定義した伝播関数は，1粒子が伝播する際の確率振幅を記述する．明らかに，これは物理的に興味ある量である．というのも，粒子が $(y^0, \boldsymbol{y})$ から $(x^0, \boldsymbol{x})$ へ伝播する間に外場あるいは他の粒子と相互作用を受けると，それによって伝播の確率振幅が影響されるためである．よって，相互作用を含む一般化された伝播関数 $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$ を計算することによって，相互作用の効果を理解できる．例えば，散乱振幅は伝播関数から直接計算できる．

伝播関数を多粒子系へ一般化することも簡単にできる．求めるべき量は

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N))|0\rangle \tag{4.21}$$

で定義される N 点関数である．例として，4点関数 $G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を考えよう．$x_1^0, x_2^0, x_3^0 \to \infty$ と $x_4^0 \to -\infty$ の極限では，遠い過去に1粒子，遠い未来に3粒子があり，これは1粒子から3粒子への崩壊過程に対応している．このように時間成分を割り当てると，$G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ はこの崩壊過程の確率振幅を与える．同じように，$x_1^0, x_2^0 \to \infty$ と $x_3^0, x_4^0 \to -\infty$ の極限では，遠い過去に2粒子，遠い未来に2粒子があるので，$G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ は2粒子の散乱振幅に対応している．同様に，N 点関数はさまざまな物理過程の振幅を与えることがわかる．よって，N 点関数が興味ある物理量であることは明らかである．

すべての N 点関数を簡素に記述するには，これらを次に定義する生成汎関数 $Z[J]$ にまとめればよい．

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_N \frac{1}{N!}\int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_N\, G(x_1,x_2,\ldots,x_N)J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_N) \\ &= \langle 0|T\left[\exp(\int J\phi)\right]|0\rangle. \end{aligned} \tag{4.22}$$

ここで，$J(x)$ は時空間座標 x の関数であり，演算子ではない．これはしばしばソース関数（または源関数）と呼ばれる．$Z[J]$ を J で展開すると，すべての N 点関数はその展開係数として再現できる．あるいは，

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} Z[J] \Bigg]_{J=0} \tag{4.23}$$

と表すことができる．

つぎに，$Z[J]$ が従う方程式を導出しよう．この導出において基本的な事項は，演算子の運動方程式と同時刻の正準交換関係である．まず，次の量を計算しよう．

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= \sum_N \frac{1}{N!} \int J(y_1)J(y_2)\cdots J(y_N)\langle 0|T\phi(x)\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\phi(y_N)|0\rangle \\ &= \langle 0|\, T\phi(x)e^{\int J\phi}\, |0\rangle. \end{aligned} \tag{4.24}$$

この量に $\square_x$ を作用させてみよう．空間微分は，時間順序記号に関係なく，$\phi(x)$ に作用する．一方，時間微分は余分な項を生成する．これは次のようにわかる．時間順序積の定義から，

$$\begin{aligned}\langle 0|T\phi(x)e^{\int J\phi}|0\rangle &= \langle 0|e^{\int_{t_{M-1}}^{t_M} dy^0 d^3y J\phi} e^{\int_{t_{M-2}}^{t_{M-1}} dy^0 d^3y J\phi} \cdots e^{\int_{x^0}^{t_1} dy^0 d^3y J\phi} \phi(x) \\ &\quad \times e^{\int_{t'_1}^{x^0} dy^0 d^3y J\phi} e^{\int_{t'_2}^{t'_1} dy^0 d^3y J\phi} \cdots e^{\int_{t'_M}^{t'_{M-1}} dy^0 d^3y J\phi} |0\rangle \\ &= \langle 0|Te^{\int_{x^0}^{\infty} dy^0 d^3y J\phi} \phi(x) Te^{\int_{-\infty}^{x^0} dy^0 d^3y J\phi}|0\rangle \\ &= \langle 0|P(\infty, x^0)\phi(x)P(x^0, -\infty)|0\rangle \end{aligned} \tag{4.25}$$

と書くことができる．ここで，1 行目で時間範囲を t_i, t'_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ でラベルされる $2M$ 個の時間間隔で分割した．通常の積分の定義と同様に，最終的には時間間隔が無限小（つまり $M \to \infty$）となる極限を考える．2 行目では，演算子の順序を適切にとって x^0 依存性を明示した．また，表記を簡略化するために

$$P(z^0, y^0) = T\exp\left(\int_{y^0}^{z^0} d^4x\ J(x)\phi(x)\right) \tag{4.26}$$

と定義した．これは

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^0}P(z^0, y^0) &= \int d^3x\ J(z^0, \boldsymbol{x})\phi(z^0, \boldsymbol{x})P(z^0, y^0), \\ \frac{\partial}{\partial y^0}P(z^0, y^0) &= -P(z^0, y^0)\int d^3x\ J(y^0, \boldsymbol{x})\phi(y^0, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

をみたす．(4.25) の時間微分をとり，(4.27) をもちいると，

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\langle 0|T\phi(x)e^{\int J\phi}|0\rangle = \langle 0|P(\infty,x^0)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}P(x^0,-\infty)|0\rangle + \int d^3y J(x^0,\boldsymbol{y})\langle 0|P(\infty,x^0)\Big[\phi(x)\phi(x^0,\boldsymbol{y}) - \phi(x^0,\boldsymbol{y})\phi(x)\Big]P(x^0,-\infty)|0\rangle \tag{4.28}$$

を得る．同時刻の交換子 $[\phi(x^0,\boldsymbol{x}),\phi(x^0,\boldsymbol{y})]$ の余分な項が現れるが，これは正準交換関係よりゼロである．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\langle 0|T\phi(x)e^{\int J\phi}|0\rangle = \langle 0|P(\infty,x^0)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}P(x^0,-\infty)|0\rangle \tag{4.29}$$

となる．同様に，2 階の時間微分は

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\langle 0|T\phi(x)e^{\int J\phi}|0\rangle = \langle 0|P(\infty,x^0)\frac{\partial^2\phi(x)}{(\partial x^0)^2}P(x^0,-\infty)|0\rangle + \int d^3y J(x^0,\boldsymbol{y})\langle 0|P(\infty,x^0)[\dot\phi(x^0,\boldsymbol{x}),\phi(x^0,\boldsymbol{y})] P(x^0,-\infty)|0\rangle \tag{4.30}$$

となる．余分な項 $[\dot\phi(x^0,\boldsymbol{x}),\phi(x^0,\boldsymbol{y})]$ は $-i\delta^{(3)}(x-y)$ となる．これより，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}&\langle 0|T\phi(x)e^{\int J\phi}|0\rangle \\ &= \langle 0|P(\infty,x^0)\frac{\partial^2\phi(x)}{(\partial x^0)^2}P(x^0,-\infty)|0\rangle - iJ(x)\langle 0|Te^{\int J\phi}|0\rangle \\ &= \langle 0|T\left[\frac{\partial^2\phi(x)}{(\partial x^0)^2}e^{\int J\phi}\right]|0\rangle - iJ(x)Z[J]\end{aligned} \tag{4.31}$$

となることがわかる．したがって，

$$(\Box_x + m^2)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|T\left[(\Box_x + m^2)\phi(x)e^{\int J\phi}\right]|0\rangle - iJ(x)Z[J] \tag{4.32}$$

となる．ここまで，正準交換関係を使って上式を得た．つぎに，自由スカラー場演算子の運動方程式 $(\Box + m^2)\phi = 0$ をもちいると，方程式

$$(\Box_x + m^2)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = -iJ(x)Z[J] \tag{4.33}$$

を得る．これは $Z[J]$ の運動方程式である．すべての N 点関数はこの汎関数方程式を解くことによって求められる．その解は次のように実に簡単に表す

ことができる.

$$Z[J]=\mathcal{N}\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)G(x,y)J(y)\right]. \tag{4.34}$$

ここで，$\mathcal{N}$ は J によらない量である．定義式 $Z[J]=\langle 0|T\exp(\int J\phi)|0\rangle$ から，$Z[0]=1$ でなければならない．よって，規格化因子 $\mathcal{N}$ は 1 に固定される．(4.34) が (4.33) の解であることは，$(\Box_x+m^2)G(x,y)=-i\delta^{(4)}(x-y)$ をもちいると簡単に示すことができる．ここでもちいられるグリーン関数 $G(x,y)$ にはさまざまな可能性が存在する．しかし，$Z[J]$ の定義式を J についての 2 次に展開した形をもちいると，(4.34) の解から，$\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle=G(x,y)$ となることがわかる．これは (4.34) の $G(x,y)$ をファインマンの伝播関数に特定する．あるいは同じことであるが，$(\Box+m^2)$ の逆演算子をとる際の境界条件を特定する．

(4.23) と (4.34) をもちいると，N 点関数 $G(x_1,\ldots,x_N)$ を明示的に

$$G(x_1,\ldots,x_{2n})=\sum_P G(x_{i_1},x_{i_2})G(x_{i_3},x_{i_4})\cdots G(x_{i_{2n-1}},x_{i_{2n}}) \tag{4.35}$$

と書き下せる．ここで，和は座標 $x_1,x_2,\ldots,x_{2n}$ でラベルされたすべての組み合わせについてとられる．

4.2　フェルミ粒子の伝播関数

スピン $\frac{1}{2}$ 粒子（フェルミ粒子）の場の演算子は

$$\psi(x)=\sum_{p,r}\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\left[a_{p,r}\,u_r(p)e^{-ipx}+b^\dagger_{p,r}v_r(p)e^{ipx}\right], \tag{4.36}$$

$$\bar{\psi}(x)=\sum_{p,r}\sqrt{\frac{m}{E_pV}}\left[a^\dagger_{p,r}\bar{u}_r(p)e^{ipx}+b_{p,r}\bar{v}_r(p)e^{-ipx}\right] \tag{4.37}$$

で与えられる．ここで，生成消滅演算子は反交換関係をみたす．スカラー場において，時間順序積 $T[\phi(x)\phi(y)]$ は $x^0>y^0$ のとき $\phi(x)\phi(y)$, $y^0>x^0$ のとき $\phi(y)\phi(x)$ と定義された．同時刻で ϕ は可換であるので $x^0\to y^0$ で，極限の取り方に関わらず，積は同じ形になる．フェルミ粒子の場合，場の演算子は同時刻で反交換に従うので，y^0, x^0 の大小関係に関わらず $x^0\to y^0$ の

極限で積が同じ形になるには，時間順序積を

$$T\,\psi(x)\psi(y) = \begin{cases} \psi(x)\psi(y) & (x^0 > y^0) \\ -\psi(y)\psi(x) & (y^0 > x^0) \end{cases}$$

と定義しなければならない．ψ と $\bar{\psi}$ についても同様に

$$T\,\psi(x)\bar{\psi}(y) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & (x^0 > y^0) \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & (y^0 > x^0) \end{cases} \tag{4.38}$$

となる．このとき，伝搬関数は

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\ &= \sum_{p,s}\left(\frac{m}{E_pV}\right)\Big[\theta(x^0-y^0)u_{sp}\bar{u}_{sp}e^{-ip(x-y)} \\ &\qquad\qquad - \theta(y^0-x^0)v_{sp}\bar{v}_{sp}e^{ip(x-y)}\Big] \\ &= \sum_{p}\left(\frac{1}{2E_pV}\right)\Big[\theta(x^0-y^0)(\gamma\cdot p+m)e^{-ip(x-y)} \\ &\qquad\qquad - \theta(y^0-x^0)(\gamma\cdot p-m)e^{ip(x-y)}\Big] \\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big[\theta(x^0-y^0)(\gamma\cdot p+m)e^{-ip(x-y)} \\ &\qquad\qquad - \theta(y^0-x^0)(\gamma\cdot p-m)e^{ip(x-y)}\Big] \end{aligned} \tag{4.39}$$

と定義される.（最後に $V\to\infty$ の極限をとった.）ここで，関係式

$$\begin{aligned} \sum_{p,s}u_{sp}\bar{u}_{sp} &= \frac{(\gamma\cdot p+m)}{2m}, \\ \sum_{p,s}v_{sp}\bar{v}_{sp} &= \frac{(\gamma\cdot p-m)}{2m} \end{aligned} \tag{4.40}$$

をもちいた．伝播関数 (4.39) は

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\ &= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot p+m}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)} \\ &= (i\gamma\cdot\partial+m)G(x,y) \end{aligned} \tag{4.41}$$

と表せる．また，$\langle 0|T\psi(x)\psi(y)|0\rangle = \langle 0|T\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = 0$ が成り立つ．

フェルミ粒子の伝播関数 (4.41) が

$$(i\gamma \cdot \partial - m)S(x,y) = i\delta^{(4)}(x-y) \tag{4.42}$$

に従うことは簡単にわかる．したがって，この伝播関数は $(i\gamma \cdot \partial - m)$ の逆演算子である．

4.3 グラスマン数とフェルミ粒子の生成汎関数

多粒子系のフェルミオン伝播関数を定義するには，以前と同様，生成汎関数でまとめて表すのが便利である．フェルミ粒子の重要な特徴は排他律にあった．つまり，フェルミ粒子が 2 重に占有される状態は存在しない．これは，フェルミオン場がみたす反交換関係に反映されている．また，フェルミオン演算子の時間順序積 (4.38) の定義もこれに由来する．よって，多粒子の伝播関数をまとめる（ボソン場の J に相当する）適切なソース関数，およびこの関数についての汎関数微分は，反交換する c 数関数つまりグラスマン変数で与えられる．グラスマン数 η は関係式

$$\eta^2 = 0\,, \qquad \eta \neq 0 \tag{4.43}$$

をみたす．言い換えると，グラスマン数はベキ零である．もし必要であれば，η の具体的な形として

$$\eta = p\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

をもちいることができる．ただし，p は実数である．グラスマン変数が多数存在するとき，これを表すのはかなり複雑になる．しかし幸いにも，いまの議論では，そのような明示的な表現は必要とならない．つまり，代数構造がわかれば十分である．多数のグラスマン変数 η_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ は

$$\eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0 \tag{4.45}$$

と記述できる．より一般に，グラスマン数の値をもつ関数 $\eta(x)$ を考えることもできる．(x は添え字 i を連続的にしたものと考えられる．）グラスマン数の

値をもつ関数に対しては

$$\eta(x)\eta(y) + \eta(y)\eta(x) = 0 \tag{4.46}$$

が成り立つ．2 つのグラスマン数の積（あるいは，一般に偶数個のグラスマン数の積）は通常の c 数関数つまり可換なボソン変数として振る舞う．

グラスマン変数の関数を定義することもできる．これは，原点近傍におけるグラスマン変数のテイラー級数展開で定義される．グラスマン変数の 2 乗はゼロなので，グラスマン変数の数が有限の場合，この級数は常に有限となる．例えば，1 つのグラスマン変数による関数は

$$f(x, \eta) = f_0(x) + \eta f_1(x) \tag{4.47}$$

と表される．また，変数が N 個 η_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の場合は，

$$\begin{aligned} f(x, \eta) = f_0(x) + \sum_i f_i(x)\eta_i + \frac{1}{2!}\sum_{ij} f_{ij}(x)\eta_i\eta_j + \cdots \\ + \frac{1}{N!}\sum_{i_1 i_2 \ldots i_N} f_{i_1 i_2 \ldots i_N}(x)\eta_{i_1}\eta_{i_2}\cdots\eta_{i_N} \end{aligned} \tag{4.48}$$

となる．η は反交換関係をみたすので，η の積の係数となる $f_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ も添え字の交換について反対称でなければならないことに注意しよう．

このような関数の微分は，次のように定義できる．まず η_i の変分をとり，この際に現れる $\delta\eta_i$ を，添え字の反対称性をもちいて，左端へ移動させる．このとき，$\delta\eta_i$ の係数を関数の微分と定義する．これより，

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = f(x)_i + \sum_{i_2} f_{ii_2}\eta_{i_2} + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}\sum_{i_2 \ldots i_N} f(x)_{ii_2 \ldots i_N}\eta_{i_2}\cdots\eta_{i_N} \tag{4.49}$$

となることがわかる．また，この微分は関係式

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial}{\partial \eta_j} = -\frac{\partial}{\partial \eta_j}\frac{\partial}{\partial \eta_i} \tag{4.50}$$

をみたす．同様に，汎関数微分も $\eta(x)$ の級数展開をもちいて定義でき，関係式

$$\frac{\partial}{\partial \eta(x)}\frac{\partial}{\partial \eta(y)} = -\frac{\partial}{\partial \eta(y)}\frac{\partial}{\partial \eta(x)} \tag{4.51}$$

をみたす．

グラスマン数・変数の概念は，そのベキ零性のため，実数や複素数に比べて直感的でない，あるいは自然でない，と思われるかもしれない．しかしながら，上で与えたグラスマン数の関係式は，計算上矛盾のない代数的な規則を成すので，いまの議論の目的としてはこれで十分である．

つぎに，フェルミオン場の議論に戻ろう．フェルミオンの伝播関数は $S(x,y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ で与えられ，これは (4.42) をみたす．多粒子系のフェルミオン伝播関数は生成汎関数

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \langle 0|T\exp\left(\int \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)|0\rangle \tag{4.52}$$

を導入して議論できる．ここで，$\eta,\bar{\eta}$ はグラスマン数の値をもつ関数であり，ボソン場の J に対応する．つまり，フェルミオンの N 点関数は，$Z[\eta,\bar{\eta}]$ をこれらの関数で適当な回数だけ微分して，最後に $\eta,\bar{\eta}$ をゼロにすれば得られる．ソース関数 $\eta,\bar{\eta}$ はスピノールであり，グラスマン数の値をもたなければならない．これらは，$\psi,\bar{\psi}$ とも反交換関係にあるとする．このようなソース関数を導入する利点は

$$T\bar{\eta}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\eta(y) = \begin{cases} \bar{\eta}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\eta(y) & (x^0 > y^0) \\ \bar{\psi}(y)\eta(y)\bar{\eta}(x)\psi(x) & (y^0 > x^0) \end{cases} \tag{4.53}$$

と書ける点にある．したがって，$\bar{\eta}(x)\psi(x)$ と $\bar{\psi}(y)\eta(y)$ の組み合わせは，時間順序に対して，ボソンの演算子のように振る舞う．フェルミオン演算子の時間順序を定義する際に導入されたマイナス符号は，グラスマン数の値をもつソースによって相殺される．ここで生成汎関数の微分は

$$\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)} = \langle 0|T\psi(x)e^{\int \bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta}|0\rangle \tag{4.54}$$

と書けるので，これに演算子 $(i\gamma\cdot\partial - m)$ を作用させると

$$\begin{aligned}(i\gamma\cdot\partial - m)\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)} &= \langle 0|T(i\gamma\cdot\partial - m)\psi(x)e^{\int \bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta}|0\rangle \\ &\quad + i\gamma^0\int d^3y\langle 0|T[\psi(x),(\bar{\eta}\psi(y)+\bar{\psi}\eta(y))]\,e^{\int \bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta}|0\rangle\end{aligned} \tag{4.55}$$

を得る．右辺第 1 項は ψ のディラック方程式よりゼロとなる．第 2 項の交換

子は同時刻の交換子であり，正準反交換関係をもちいて計算することができ，$\gamma^0\eta\delta^{(3)}(x-y)$ となる．したがって，上式は

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)} = i\eta(x)Z \tag{4.56}$$

と変形される．この方程式の解は

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \exp\left[\int d^4x d^4y\ \bar{\eta}(x)S(x,y)\eta(y)\right] \tag{4.57}$$

で与えられる．ただし，$Z[0,0]=1$ となるように規格化した．

参考文献

1. 空間的に離れた場の可換であることは，重要な物理的要請である．これは，ワイトマン (Wightman) の形式化において，場の理論の公理の 1 つと考えられる．これについては R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W.A. Benjamin, Inc. (1964) を参照されたい．場の伝播の因果律と反粒子の関係については R.P. Feynman, "The Reason for Antiparticles" in *Elementary Particles and the Laws of Physics*, Oxford University Press (1987) でも議論されている．

2. ファインマン伝播関数の重要性はシュテュッケルベルグ (Stückelberg)，ファインマン，ダイソンによって認識された．これについては J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958); S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It*, Princeton University Press (1994) を参照されたい．

3. グラスマン変数の場の理論への応用についてのオリジナルな文献は F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press (1966) である．統計力学では，分配関数や散乱問題などの計算においてグラスマン変数が長年もちいられてきた．グラスマン変数を使ったイジング模型の興味深い解については S. Samuel, J. Math. Phys. **19**, 1438 (1978) を参照されたい．

第 5 章

相互作用と S 行列

5.1 S 行列の一般公式

この章では，まず相互作用をする場の理論についての記述から始めよう．例として，ϕ^4 の相互作用項をもつスカラー場の理論について考える．もちろん，以下の形式化はより一般に成り立ち，多項式で表される任意の相互作用をもつ場合に簡単に拡張できる．

したがって，ここで考えるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2\right] - \lambda\phi^4 \tag{5.1}$$

で与えられる．ただし，λ は定数である．これは相互作用の強さを測り，結合定数と呼ばれる．運動方程式は

$$(\Box_x + m^2)\phi(x) + 4\lambda\phi^3(x) = 0 \tag{5.2}$$

で与えられる．量子論では，$\phi(x)$ はヒルベルト空間上の演算子なので，上式は演算子の運動方程式である．運動方程式に加えて，さらに正準交換関係

$$\begin{aligned}
\left[\phi(x^0, \boldsymbol{x}), \phi(x^0, \boldsymbol{y})\right] &= 0, \\
\left[\pi(x^0, \boldsymbol{x}), \phi(x^0, \boldsymbol{y})\right] &= -i\,\delta^{(3)}(x - y), \\
\left[\pi(x^0, \boldsymbol{x}), \pi(x^0, \boldsymbol{y})\right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

が成り立つ．ここで，$\pi(x^0, \boldsymbol{x}) = \partial_0\phi(x^0, \boldsymbol{x})$ である．相互作用項 $4\lambda\phi^3$ がゼロの場合，$\phi(x)$ は自由スカラー場であり，通常の多粒子的な描像が得られる．

この場合，交換関係と運動方程式から $\phi(x) = \sum a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)$ がわかる．ただし，a_k, $a_k^\dagger$ は粒子の消滅・生成の演算子を表す．ϕ の方程式は線形なので，1 粒子状態の概念は時間とともに変化しない．一方，相互作用項がある場合は，運動方程式が非線形であり，例えば $a_k^\dagger$ に注目すると，非線形項のために $a^{\dagger 3}, a^\dagger a^2, \ldots$ といった項が現れることがわかる．したがって，状態 $a_k^\dagger|0\rangle$ は，例えば $a_k^{\dagger 3}|0\rangle$ へ時間発展することができる．これは，1 粒子状態から 3 粒子状態への崩壊を記述する．また，$a_k^\dagger a_l^\dagger|0\rangle$ から $a_p^\dagger a_q^\dagger|0\rangle$ への時間発展は添え字に示された運動量をもつ 2 粒子の散乱過程を記述する．このような過程は，一般に「散乱」と総称される．我々に興味のある基本量は，このような過程の散乱振幅あるいは遷移振幅で与えられる．

前章で議論したように，これらの振幅は N 点関数

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N))|0\rangle \tag{5.4}$$

から求めることができる．ただし，時間のラベルを対象となる散乱過程に合わせて，$\pm\infty$ ととればよかった．したがって，散乱振幅を計算するに当たりまず，相互作用のある場合にこの N 点関数が従う方程式を求めよう．N 点関数の生成汎関数は

$$Z[J] = \langle 0|T \exp\left[\int d^4x\ J(x)\phi(x)\right]|0\rangle \tag{5.5}$$

と定義された．また前章の (4.32) より，$Z[J]$ は

$$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|T\left[(\Box_x + m^2)\phi(x)e^{\int J\phi}\right]|0\rangle - iJ(x)Z[J] \tag{5.6}$$

に従う．ここで，$i\epsilon$ は使われるべきグリーン関数がファインマンの伝播関数 $G(x,y)$ に特定されることを明示している．自由場の議論では，運動方程式は $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ であり，これをもちいて上式を変形した．この場合と相互作用がある場合との唯一の違いは，運動方程式が異なる点にある．実際，(5.2) をもちいると，相互作用がある場合の生成汎関数は方程式

$$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} + \langle 0|T\left[4\lambda\phi^3(x)e^{\int J\phi}\right]|0\rangle = -iJ(x)Z[J] \tag{5.7}$$

に従うことがわかる．

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}Z[J] = \langle 0|T\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)e^{\int J\phi}\right]|0\rangle \tag{5.8}$$

なので，(5.7) は

$$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} + 4\lambda\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 Z[J] = -iJ(x)Z[J] \tag{5.9}$$

と表せる．相互作用がないとき，この式の解は

$$Z_0[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\ J(x)G(x,y)J(y)\right] \tag{5.10}$$

で与えられた．よって，(5.9) の解は

$$Z[J] = \mathcal{N}\exp\left[-i\lambda\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right] Z_0[J] \tag{5.11}$$

で与えられる．$\mathcal{N}$ は規格化因子である．この解は次のように簡単に確かめられる．

$$\begin{aligned}(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= \mathcal{N}e^{-i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4}(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \\ &= \mathcal{N}e^{-i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4}(-iJ(x)Z_0[J]) \\ &= e^{-i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4}(-iJ(x))e^{i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4} Z[J] \\ &= -4\lambda\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 Z[J] - iJ(x)\,Z[J].\end{aligned} \tag{5.12}$$

ただし，恒等式

$$\begin{aligned}e^{-i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4}(-iJ(x))e^{i\lambda\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4} &= -iJ(x) - \lambda\left[\int\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4,\ J(x)\right] \\ &= -iJ(x) - 4\lambda\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\end{aligned} \tag{5.13}$$

をもちいた．

さらに次の恒等式をもちいると，(5.11) の解をより便利な形に変形できる．

$$F\left[\frac{\delta}{\delta\varphi}\right] G[\varphi]e^{\int J\varphi}\Bigg]_{\varphi=0} = G\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] F[J]. \tag{5.14}$$

ただし，F, G は級数展開が可能な汎関数であるとする．また，φ は時空間座標の関数であり，場の演算子ではない．この恒等式 (5.14) は，左辺を次のよ

うに変形して確かめることができる.

$$
\begin{aligned}
F\left[\frac{\delta}{\delta\varphi}\right] G[\varphi]\, e^{\int J\varphi}\Big]_{\varphi=0} &= F\left[\frac{\delta}{\delta\varphi}\right] G\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] e^{\int J\varphi}\Big]_{\varphi=0} \\
&= G\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] F\left[\frac{\delta}{\delta\varphi}\right] e^{\int J\varphi}\Big]_{\varphi=0} \\
&= G\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] F\,[J]\, e^{\int J\varphi}\Big]_{\varphi=0} \\
&= G\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] F[J]. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

(5.14) をもちいると (5.11) は

$$
Z[J] = \mathcal{N}\, e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta}\, e^{-i\int \lambda\varphi^4 + \int J\varphi}\Big]_{\varphi=0} \qquad (5.16)
$$

と表せる. ただし,

$$
\int G\delta\delta = \int d^4x d^4y\ G(x,y)\,\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\,\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}
$$

などの明らかな省略記号をもちいた. $J\varphi$ の項を左に移動させることで, (5.16) をさらに変形できる. これは次のように実行できる.

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta} e^{\int J\varphi} &= e^{\int J\varphi}\left[e^{-\int J\varphi} e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta} e^{\int J\varphi}\right] \\
&= e^{\int J\varphi} \exp\left[e^{-\int J\varphi}\left(\frac{1}{2}\int G\delta\delta\right) e^{\int J\varphi}\right] \\
&= e^{\int J\varphi} \exp\left[\frac{1}{2}\int G\delta\delta + \left[\frac{1}{2}\int G\delta\delta, \int J\varphi\right]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2!}\left[\left[\frac{1}{2}\int G\delta\delta, \int J\varphi\right], \int J\varphi\right]\right] \\
&= e^{\int J\varphi} \exp\left[\frac{1}{2}\int G\delta\delta + \int JG\delta + \frac{1}{2}\int JGJ\right]. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

よって, 解 (5.16) は

$$
Z[J] = e^{\frac{1}{2}\int JGJ}\left[e^{\int JG\delta}\mathcal{F}[\varphi]\right]_{\varphi=0}
$$

$$\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{N} e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta} e^{-i\lambda\int\varphi^4} \tag{5.18}$$

と表せることがわかる．

(5.18) の導出では，摂動近似をもちいなかった．しかし，(5.18) の形は摂動展開に適した形であり，これは $\exp(-i\lambda\int\varphi^4)$ を λ の級数で展開して求めることができる．

$\exp(-i\lambda\int\varphi^4)$ の量は，当然ながら $\exp(iS_{int})$ を与える．ただし，$\mathcal{S}_{int} = -\lambda\int\varphi^4$ は作用に現れる相互作用項である．したがって，上の公式は，次のように，多項式で表される相互作用一般に適用することができる．

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{\frac{1}{2}\int JGJ}\left[e^{\int JG\delta}\mathcal{F}[\varphi]\right]_{\varphi=0}, \\ \mathcal{F}[\varphi] &= \mathcal{N}\exp\left(\frac{1}{2}\int G\delta\delta\right)\exp\left(i\mathcal{S}_{int}[\varphi]\right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

規格化因子 $\mathcal{N}$ は $Z[0]=1$ を要請することによって固定される．これは，

$$\mathcal{N}\left[e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta}e^{i\mathcal{S}_{int}[\varphi]}\right]_{\varphi=0} = 1 \tag{5.20}$$

とおくことと同じである．

つぎに，散乱振幅の議論に戻ろう．まず，$Z[J]$ の一部である $e^{\int JG\delta}\mathcal{F}[\varphi]$ について考えよう．この因子の N 点関数への寄与は

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int d^4z_1 d^4z_2\cdots d^4z_N\ G(x_1,z_1)G(x_2,z_2)\cdots \\ G(x_N,z_N)\,V(z_1,z_2,\ldots,z_N) \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$V(z_1,z_2,\ldots,z_N) = \frac{\delta}{\delta\varphi(z_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi(z_2)}\cdots\frac{\delta}{\delta\varphi(z_N)}\mathcal{F}[\varphi]\Bigg]_{\varphi=0} \tag{5.22}$$

として求められる．$V(z_1,z_2,\ldots,z_N)$ はしばしば頂点関数と呼ばれる．

座標の時間成分が $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 \to -\infty$, $x_{n+1}^0, \ldots, x_N^0 \to \infty$ となる場合を考えよう．頂点関数が発散しないとき，つまり関数が有限に収まっているとき，$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 < z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ および $x_{n+1}^0, \ldots, x_N^0 > z_{n+1}^0, \ldots, z_N^0$ ととれる．このとき，伝播関数 $G(x,z)$ は適当な時間順序積で置き換えることができる．よって，

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int d^4z_1 d^4z_2 \cdots d^4z_N \sum_{k_i} u_{k_1}(z_1)u^*_{k_1}(x_1)u_{k_2}(z_2)u^*_{k_2}(x_2)\cdots u_{k_{n+1}}(x_{n+1})u^*_{k_{n+1}}(z_{n+1})\cdots V(z_1, z_2, \ldots, z_N) \tag{5.23}$$

となることがわかる．一般に N 点関数は確率振幅として解釈できるので，これは $x_1, x_2, \ldots, x_n$ にあった粒子が $x_{n+1}, \ldots, x_N$ で観測される伝播過程の確率振幅と考えられる．よって，これは物理的に重要な量である．ただし，ここでは粒子の座標を特定する座標表示がもちいられている．ほとんどの散乱過程では，運動量が特定される．その場合の振幅は，1 章で与えられた正規直交関係 (1.3) をもちいて，適切なフーリエ変換を行うことによって運動量の固有状態を射影すれば求められる．その結果は，

$$\begin{aligned}
S(k_1, k_2, \ldots, k_n \to k_{n+1}, \ldots, k_N) &= \int d^4z_1 d^4z_2 \cdots d^4z_N\ u_{k_1}(z_1)u_{k_2}(z_2)\cdots \\
&\quad u^*_{k_{n+1}}(z_{n+1})\cdots u^*_{k_N}(z_N)\, V(z_1, z_2, \ldots, z_N) \\
&= \int d^4z_1 d^4z_2 \cdots d^4z_N\ u_{k_1}(z_1)u_{k_2}(z_2)\cdots \\
&\quad u^*_{k_{n+1}}(z_{n+1})\cdots u^*_{k_N}(z_N) \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta\varphi(z_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi(z_2)}\cdots\frac{\delta}{\delta\varphi(z_N)}\mathcal{F}[\varphi]\Bigg]_{\varphi=0}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

となる．$S(k_1, k_2, \ldots, k_n \to k_{n+1}, \ldots, k_N)$ は運動量表示の散乱振幅を与える．これは演算子 $\hat{S}$ の行列要素

$$S(k_1, k_2, \ldots, k_n \to k_{n+1}, \ldots, k_N) = \langle k_{n+1}, \ldots, k_N|\hat{S}|k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle$$

とみなすことができる．ここで，演算子 $\hat{S}$ は散乱演算子あるいは S 演算子と呼ばれる．式 (5.22), (5.24) から，この行列要素は汎関数 $\mathcal{F}[\varphi]$ で決まることがわかる．よって，$\mathcal{F}[\varphi]$ は S 行列汎関数と呼ばれる．(5.24) の汎関数微分より，S 行列の要素は $\mathcal{F}[\varphi]$ の φ を入射粒子については 1 粒子波動関数 u_k，放射粒子については u^*_k でそれぞれ置き換えることによって得られることがわかる．

ここまで，$Z[J]$ の $\exp(\frac{1}{2}\int JGJ)$ で生じる項の効果を考えなかった．これは $G(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ に現れる $G(x_1, x_2)G(x_3, \ldots, x_N)$ などの項，つまりいくつかの自由伝播関数と N' 点関数 $(N' < N)$ の積の形で表される項を導く．伝播関数を u_k, u_k^* で因子化すると，これらは相互作用に関与せずにただ飛び去るだけの粒子を表していることがわかる．つまり，これらは主要な散乱過程からは切り離された伝播関数である．したがって，$\exp(\frac{1}{2}\int JGJ)$ は一部だけの粒子の散乱を表しており，あまり重要でない．（このうち，自明でない寄与は J の次数が低い項で与えられる．）

式 (5.21) から，

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_j^N i(\Box_{x_j} + m^2)G(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{5.25}$$

と表せることに注意しよう．ただし，関係式 $i(\Box_x + m^2)G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y)$ をもちいた．よって，散乱振幅は

$$\begin{aligned} S(k_1, k_2, \ldots, k_n \to k_{n+1}, \ldots, k_N) = & \\ & \prod_{j=1}^n \int_x u_{k_j}(x_j) i(\Box_{x_j} + m^2) \\ & \times \prod_{r=n+1}^N \int_y u_{k_r}^*(x_r) i(\Box_{x_r} + m^2)\, G(x_1, \ldots, x_N) \end{aligned} \tag{5.26}$$

となる．この結果は，S 行列の簡約公式として知られている．（演算子 $i(\Box_{x_j} + m^2)$ は伝播関数の極と相殺するので，1 粒子波動関数に微分が作用するようなことはなく，その項についての部分積分も現れない．言い換えれば，上式で波動関数は任意に選ぶことができ，最終的にこれらを自由粒子の波動関数と解釈すればよい．）

(5.19) に $J = i(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi$ を代入し部分積分を行うと，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F}[\varphi] = e^{-\frac{i}{2}\int \varphi(\Box + m^2)\varphi}\, Z[i(\Box + m^2)\varphi] \tag{5.27}$$

と書けることがわかる．つまり，これは自明な因子 $\exp(-\frac{i}{2}\int \varphi(\Box + m^2)\varphi)$ を別にすると，$J = i(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi$ と選んだときの $Z[J]$ を評価しているにすぎない．

5.2 ウィックの定理

つぎに，S 行列汎関数の摂動展開を考えよう．このとき，$\varphi(x_i)$ を $\varphi(i)$ で表すと，$\exp(\int \frac{1}{2}G\delta\delta)\,\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N)$ という形の項が現れる．

そこで，場 φ に対する $\int \frac{1}{2}G\delta\delta$ の1次の作用を見てみよう．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{x,y} G(x,y)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\,\varphi(1)\varphi(2) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left[\int_x G(x,1)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\varphi(2) + \int_x G(x,2)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\varphi(1)\right] \\
&\qquad = G(1,2).
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

演算子 $\int \frac{1}{2}G\delta\delta$ によって，場のペアがその伝播関数で置き換えられる．この操作は，ウィック縮約と呼ばれる．つぎに，$\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N)$ への作用を考えると，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{2}G\delta\delta\ \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N) = \sum_{i<j} G(i,j)\varphi(1)\cdots\varphi(i-1)\varphi(i+1)\cdots \\
\varphi(j-1)\varphi(j+1)\cdots\varphi(N)
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

を得る．右辺には再度，伝播関数が1つだけ現れ，ウィック縮約あるいは添え字のペアについてすべての和がとられていることに注意しよう．上式にはその他の数値因子は現れない．$G(i,j)$ の項は2つの方法で生じる．つまり，最初の汎関数微分が $\varphi(i)$ にかかり，次の微分が $\varphi(j)$ にかかる場合と，最初の微分が $\varphi(j)$ にかかり，次の微分が $\varphi(i)$ にかかる場合である．これにより，左辺の $\frac{1}{2}$ の因子は取り除かれる．

つぎに，$\exp(\int \frac{1}{2}G\delta\delta)$ の展開において，G について2次の項を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2!}\int \frac{1}{2}G\delta\delta \int \frac{1}{2}G\delta\delta\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4) = G(1,2)G(3,4) + G(1,3)G(2,4) \\
+ G(1,4)G(2,3)
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

となるので，再びすべてのウィック縮約についての和を得る．$(1,2)$ のペアは，2つの $\int \frac{1}{2}G\delta\delta$ のうちのどちらか一方の作用によって生じるので，係数 $\frac{1}{2!}$ は相殺される．同様に，$\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N)$ に作用させると，ウィック縮約が2

度現れる項についてのすべての和が得られる．このとき，係数は 1 となる．高次の場合も同様に考えると，次の公式が得られる．

$$
\begin{aligned}
e^{\int \frac{1}{2} G\delta\delta}\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N) = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N) \\
&+ \sum \text{ウィック縮約が 1 回実行される項} \\
&+ \sum \text{ウィック縮約が 2 回実行される項} \\
&+ \sum \text{ウィック縮約が 3 回実行される項} \\
&+ \cdots .
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

この結果はウィックの定理として知られている．これは，汎関数微分を実行する際の簡単な演算規則を与える．そのような微分は，特に $\mathcal{F}[\varphi]$ の公式をもちいるときに現れる．以下では，$\exp(\int \frac{1}{2} G\delta\delta)$ をウィック縮約演算子と呼ぶことにしよう．

5.3　S 行列の摂動展開

つぎに，(5.18) で与えられた S 行列汎関数の摂動展開を考えよう．これは λ について級数展開すれば簡単に得られる．

1. λ の 0 次の項.

このとき，$Z[J] = Z_0[J]$ なので，自由粒子の場合と同じになる．

2. λ の 1 次の項.

1 次の項は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}^{-1}\mathcal{F}^{(1)} &= e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta}\left(-i\lambda\int\varphi^4\right) \\
&= -i\lambda\int\varphi^4 - i6\lambda\int\varphi(x)^2 G(x,x) - i3\lambda\int G(x,x)G(x,x)
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

となる．以下では，それぞれの項について詳しく見ていこう．まず第 1 項は 4 点の頂点関数を導くので，これは 4 粒子の散乱過程を表す．これは，$1 \to 3$ の崩壊過程，$2 \to 2$ の散乱過程，あるいは $3 \to 1$ の過程を記述する．(5.24)

と同様に，これらの振幅は φ を波動関数で置き換えることによって書き下せる．$1 \to 3$ の崩壊過程については，

$$S(k \to p_1, p_2, p_3) = (-i\lambda)4! \int d^4x \; u_k(x) u^*_{p_1}(x) u^*_{p_2}(x) u^*_{p_3}(x)$$
$$= (-i\lambda)4! \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2 - p_3)}{\sqrt{(2\omega_k V)(2\omega_{p_1} V)(2\omega_{p_2} V)(2\omega_{p_3} V)}} \tag{5.33}$$

を得る．これを図示すると図 5.1 のようになる．この図はファインマン図（ダイヤグラム）と呼ばれ，散乱過程の直感的な描像を与えるだけでなく，散乱振幅の数学的表現を記憶するのに役立つ．まず，$(1/\sqrt{2\omega V})$ の因子をそれぞれの外線に割りふり，頂点は因子 $(-i\lambda)4!$ とエネルギー運動量保存の δ 関数 $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(k - p_1 - p_2 - p_3)$ をもつとする．すると，公式 (5.33) はこれらの因子の積で表すことができる．(ここでは，すべての粒子が同じ質量をもつので，エネルギー保存則により図のような特定の散乱過程は禁止される．振幅は (5.33) のように書き下せるが，このとき δ 関数により振幅はゼロとなる．数式とダイヤグラムを関連づけるこの規則は一般的なものであり，振幅がゼロとならない場合にも適用される.)

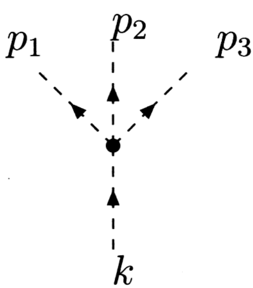


図 5.1　$1 \to 3$ 崩壊過程.

2 粒子の散乱過程 $2 \to 2$ の場合，

$$S(k_1, k_2 \to p_1, p_2) = (-i\lambda)4! \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{\sqrt{(2\omega_{k_1} V)(2\omega_{k_2} V)(2\omega_{p_1} V)(2\omega_{p_2} V)}} \tag{5.34}$$

となる．これは図 5.2 で図示される．このファインマン図は結合係数 λ につ

いて最低次の 2 粒子散乱過程を記述している．

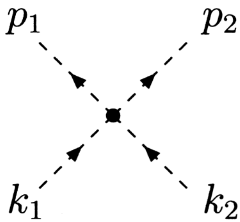


図 5.2　$2 \to 2$ 散乱過程．

つぎに，(5.33) の第 2 項 $-i6\lambda G(x,x)\varphi(x)^2$ をみてみると，これは 2 本の外線をもつ散乱過程のみに対応している．これは 1 粒子伝播の補正を与え，粒子の自己相互作用による質量補正の情報をもつ．伝播関数 $G(x,y)$ を x から y への線で表すと，この項は図 5.3 のように図示することができる．この項を適切に扱うには繰り込みについての知識が必要となるので，これについては後で議論しよう．

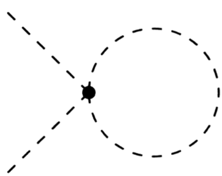


図 5.3　スカラー場の自己エネルギーまたは質量補正．

(5.33) の第 3 項 $-i3\lambda G(x,x)G(x,x)$ は，図 5.4 のように図示される．これは純粋な真空の補正，つまり $\langle 0|0\rangle$ の変化を与える．しかしながら，もちろんこれは規格化因子 $\mathcal{N}$ を適切に選ぶことによって相殺される．実際，$\mathcal{N}$ は

$$\mathcal{N} = 1 + i3\lambda \int d^4x\ G(x,x)G(x,x) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{5.35}$$

となる．

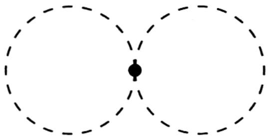


図 5.4　真空に対する 1 次補正.

（真空のファインマン図が物理的に重要となる場合も存在する．例えば，外場がある場の理論を考えると，真空または基底状態は（この外場を含むので）崩壊する．あるいは，その他の興味深い変化を受ける．これらの過程は真空のファインマン図で記述される．同様に，有限温度の場においても，真空のファインマン図は，温度に依存する重要な補正を分配関数に与える．）

3.　λ の 2 次の項.

λ^2 の項は

$$\mathcal{N}^{-1}\mathcal{F}^{(2)} = e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta}\,\frac{(-i\lambda)^2}{2!}\int d^4x d^4y\ \varphi^4(x)\varphi^4(y) \tag{5.36}$$

で与えられる．このなかには，1 次の散乱過程の項が繰り返して現れる．つまり，図 5.5 や図 5.6 のようなファインマン図で表される項が得られる．

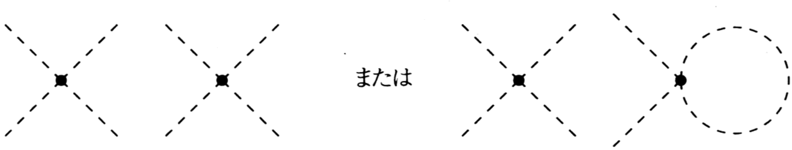


図 5.5　非連結なダイヤグラム（1 次散乱過程の繰り返し）.

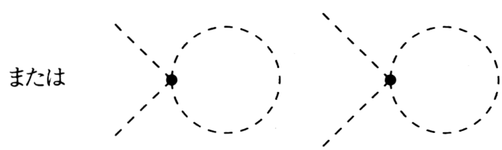


図 5.6　別の非連結ダイヤグラム（1 次散乱過程の繰り返し）.

本質的に新しい項は，x と y を連結する伝播関数が存在するときに現れる．そのような項として最も簡単なものは

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2!}4^2\int \varphi^3(x)G(x,y)\varphi^3(y) \tag{5.37}$$

で与えられる．この項は $3 \to 3$ 散乱，$2 \to 4$ 散乱，$1 \to 5$ 崩壊など，多くの散乱過程を記述する．ここでは，例えば運動量 $k_1, k_2, k_3 \to p_1, p_2, p_3$ で表される $3 \to 3$ 散乱を考えてみよう．このとき，散乱振幅は

$$\begin{aligned}S(k_i,p_i) &= (-i\lambda 4!)^2\int u_{k_1}(x)u_{k_2}(x)u_{k_2}(x)G(x,y)u^*_{p_1}(y)u^*_{p_2}(y)u^*_{p_3}(y)\\ &\qquad + (\text{添え字が置換された項})\\ &= (-i\lambda 4!)^2\frac{i}{(k_1+k_2+k_3)^2-m^2+i\epsilon}\frac{(2\pi)^2\delta^{(4)}(\sum_i k_i-\sum_i p_i)}{\prod_i\sqrt{2\omega_{k_i}V}\sqrt{2\omega_{p_i}V}}\\ &\qquad + (\text{添え字が置換された項})\end{aligned} \tag{5.38}$$

で与えられる．これは図 5.7 で図示される．運動量空間での内線つまり伝播関数を $(i/(k^2-m^2+i\epsilon))$ と表すことにすると，ファインマン図から散乱振幅の形を一気に書き下すことができる．各頂点での 4 元運動量保存則は，伝播関数の適当な運動量（いまの場合は $k_1+k_2+k_3$）を与える．(5.37) に含まれるその他さまざまな過程についても同様に扱うことができる．

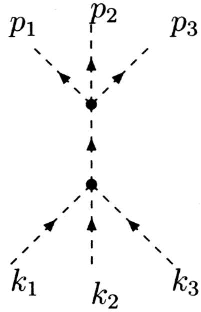


図 5.7　$3 \to 3$ 散乱過程に寄与するダイヤグラム．

x, y を連結する伝播関数が2つある項は

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2}\frac{(4\times 3)^2}{2}\int d^4xd^4y\ \varphi^2(x)\varphi^2(y)G(x,y)G(x,y) \tag{5.39}$$

に含まれる．これは，$2\to 2$ 散乱や $1\to 3$ 崩壊などに次のオーダー（つまり $\mathcal{O}(\lambda^2)$）の補正を与える．例えば，$k_1, k_2 \to p_1, p_2$ の散乱に対して，

$$\begin{aligned}\frac{(-i\lambda 4!)^2}{2}\int\Big[&u_{k_1}(x)u_{k_2}(x)G(x,y)G(x,y)u^*_{p_1}(y)u^*_{p_2}(y)\\ &+u_{k_1}(x)u^*_{p_1}(x)G(x,y)G(x,y)u_{k_2}(y)u^*_{p_2}(y)\\ &+u_{k_1}(x)u^*_{p_2}(x)G(x,y)G(x,y)u_{k_2}(y)u^*_{p_1}(y)\Big]\end{aligned} \tag{5.40}$$

となる．これらの項は，図5.8のファインマン図に適切な運動量を割り当てることによって得られる．(5.40) の $\frac{1}{2}$ 因子は汎関数微分から直接導かれるが，ファインマン図が2つの伝播関数の交換について対称性をもつことからも理解できる．実際に $G(x,y)$ を代入し，積分を実行すると，(5.40) の第1項は

$$\begin{aligned}&\frac{(-i\lambda 4!)^2}{2}\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)}{\sqrt{(2\omega_{k_1}V)(2\omega_{k_2}V)(2\omega_{p_1}V)(2\omega_{p_2}V)}}\\ &\qquad\times\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k_1+k_2+q)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\end{aligned} \tag{5.41}$$

となる．これより，測度 $(d^4q/(2\pi)^4)$ をもちいてループ運動量 q を積分しなければならないという新しい規則が必要であることがわかる．ファインマン図の基本的な規則についての議論は以上である．

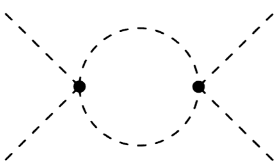


図 5.8　$2\to 2$ 散乱への $\mathcal{O}(\lambda^2)$ の補正．

$\mathcal{F}[\varphi]$ の展開は任意の高次にまで拡張することができるのは明らかであろう．また，それぞれの次数において $\mathcal{F}[\varphi]$ はさまざまな散乱過程を記述することがわかる．

5.4　崩壊確率と散乱断面積

S 行列汎関数は (5.24) を通して散乱過程の確率振幅を与える．これまで見てきたように，遷移振幅は

$$S = \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\omega_i V}}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum k - \sum p\right)\mathcal{M} \tag{5.42}$$

の形をもつ．ここで，積はすべての外粒子（入射および放射粒子）についてとられ，$\mathcal{M}$ はある不変な行列要素を表す．

崩壊確率

運動量 k の粒子が運動量 p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の n 個の粒子に崩壊する過程を考えよう．S 行列の要素は

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\prod_i^n \frac{1}{\sqrt{2\omega_i V}}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k - \sum p\right)\mathcal{M} \tag{5.43}$$

の形で表せる．この振幅の絶対値の 2 乗が崩壊確率を与える．ただ，δ 関数の 2 乗は一意に決まらない．これは時空間体積を無限とするために生じる問題である．これは，

$$\begin{aligned}\int d^4x e^{i(k-\sum p)x}\int d^4y e^{i(k-\sum p)y} &= (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k - \sum p\right)\int d^4y \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k - \sum p\right)V\tau\end{aligned} \tag{5.44}$$

と解釈されなければならない．ここで，τ は時間積分の範囲であり，いまは有限とするが，計算の最後に $\tau \to \infty$ とする．(5.43) の絶対値の 2 乗は (5.44) をもちいると，

$$|S|^2 = \frac{1}{2\omega_k V}\prod_i^n \frac{1}{2\omega_i V}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum k - \sum p\right)V\tau\,|\mathcal{M}|^2 \tag{5.45}$$

となる．よって，単位時間当たりの崩壊確率は

$$\frac{|S|^2}{\tau} = \frac{1}{2\omega_k}\prod_i^n \frac{1}{2\omega_i V}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k - \sum p\right)|\mathcal{M}|^2 \tag{5.46}$$

で与えられる．これは放射粒子の運動量が特定される場合の崩壊確率であ

る．実際には，放射粒子の運動量は平均値 $p_1, p_2, \ldots$ のまわりの微小範囲 $d^3p_1, d^3p_2, \ldots$ で揺らいでいるので，崩壊確率はこの範囲の運動量のすべての状態について積分すればよい．つまり，p_i それぞれについて $Vd^3p_i/(2\pi)^3$ の積分をとればよい．したがって，放射粒子が特定の範囲の運動量に収まるとき，その崩壊確率は

$$d\Gamma = \frac{1}{2\omega_k}|\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k - \sum p\right)\prod_i \frac{d^3p_i}{2\omega_{p_i}(2\pi)^3} \tag{5.47}$$

となる．崩壊確率の総量を得るには，放射粒子の運動量で積分すればよく，

$$\Gamma = \int d\Gamma \tag{5.48}$$

となる．粒子の寿命は $1/\Gamma$ で与えられる．$d\Gamma$ と Γ は $(1/2\omega_k)$ の因子を除いて不変であることに注意しよう．この因子は崩壊確率に正しいローレンツ変換性を与える．高速度で運動する粒子の寿命は，この因子により時間延伸の効果を受ける．

散乱断面積

つぎに，運動量 $k_1, k_2 \to p_1, p_2, \ldots, p_n$ で表される $2 \to n$ の散乱過程を考えよう．散乱振幅は

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_2}V}}\prod_i^n \frac{1}{\sqrt{2\omega_i V}}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_1 + k_2 - \sum p\right)\mathcal{M} \tag{5.49}$$

で表される．(5.44) をもちいてこの2乗を計算すると，(単位時間当たりの) 散乱確率は

$$\frac{|S|^2}{\tau} = \frac{1}{2\omega_{k_1}}\frac{1}{2\omega_{k_2}V}\prod_i^n \frac{1}{2\omega_i V}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_1 + k_2 - \sum p\right)|\mathcal{M}|^2 \tag{5.50}$$

となる．散乱断面積を求めるには，この量をフラックスで割る必要がある．ここで，フラックスは次のように計算することができる．まず，質量 m_1, m_2，運動量 k_1, k_2 をもつ2粒子の衝突を考えよう．一方の粒子が静止している場合，例えば $k_1 = (m_1, 0, 0, 0)$ のとき，もう一方の粒子によるフラックスは

$$F = \frac{1}{V}\frac{|k_2|}{\omega_{k_2}} \tag{5.51}$$

で与えられる．これは，$|k_2|/\omega_{k_2}$ が粒子の速さを与え，$1/V$ が平面波で表される粒子の密度を与えることからわかる．任意の座標系への一般化は，次のように考えられる．$k_1^2 = \omega_{k_1}^2 - \boldsymbol{k}_1{}^2 = m_1^2$ および $k_2^2 = \omega_{k_2}^2 - \boldsymbol{k}_2{}^2 = m_1^2$ なので，唯一の運動不変量 (kinematic invariant) は $k_1 \cdot k_2$ で与えられる．$k_1 = (m_1, 0, 0, 0)$ のとき，$(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = m_1^2(\omega_{k_2}^2 - m_2^2) = m_1^2 \boldsymbol{k}_2{}^2$ となる．したがって，必要な $1 \leftrightarrow 2$ の対称性を保ちながら，(5.51) を一般化すると

$$F = \frac{1}{V} \frac{\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2}} \tag{5.52}$$

となる．散乱確率 (5.50) をこのフラックスで割ると，終状態の運動量が特定された散乱の断面積が与えられる．この運動量が p_i のまわりに分散 $d^3 p_i$ の揺らぎをもつ場合，微分断面積

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum p)}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m^4}} \prod_i \frac{d^3 p_i}{2\omega_{p_i} (2\pi)^3} \tag{5.53}$$

が得られる．ここで，いまの議論に合わせて $m_1 = m_2 = m$ とした．$d\sigma$ は完全にローレンツ不変な量であることに注意しよう．また，V と τ は相殺されているので，$V, \tau \to \infty$ の極限をとることができる．

5.5 スカラー場以外への一般化

S 行列汎関数の手法は，相互作用をもつさまざまなタイプの場へ一般化することができる．公式 (5.19) が自由粒子の伝播関数とラグランジアンの相互作用項で表されていることに注意すると，これが求まれば，直ちに S 行列汎関数を書き下せることがわかる．

例として，質量 μ_1, μ_2 をもつボソン場 φ, ξ と質量 m_1, m_2 をもつフェルミオン場 P, N で表される理論を考えてみよう．これらの粒子の伝播関数は

$$G_1(x,y) = G(x,y,\mu_1) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - \mu_1^2 + i\epsilon} \right) e^{-ik(x-y)},$$
$$G_2(x,y) = G(x,y,\mu_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \right) e^{-ik(x-y)},$$

$$S_1(x,y) = S(x,y,m_1) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot p + m_1}{p^2 - m_1^2 + i\epsilon}e^{-ip(x-y)},$$
$$S_2(x,y) = S(x,y,m_2) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot p + m_2}{p^2 - m_2^2 + i\epsilon}e^{-ip(x-y)} \tag{5.54}$$

で与えられる．よって，S 行列汎関数は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi,\xi,P,N] = \mathcal{N}\exp&\left[\frac{1}{2}\int\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}G(x,y,\mu_1)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right]\\ \times\exp&\left[\frac{1}{2}\int\frac{\delta}{\delta\xi(x)}G(x,y,\mu_2)\frac{\delta}{\delta\xi(y)}\right]\\ \times\exp&\left[-\int\frac{\delta}{\delta P_r(x)}S_{rs}(x,y,m_1)\frac{\delta}{\delta\bar{P}_s(y)}\right]\\ \times\exp&\left[-\int\frac{\delta}{\delta N_r(x)}S_{rs}(x,y,m_2)\frac{\delta}{\delta\bar{N}_s(y)}\right]e^{iS_{int}[\varphi,\xi,P,N]}\end{aligned} \tag{5.55}$$

となる．ただし，(演算子の値をもつ）場とそれに対応する c 数関数をともに同じ記号 φ,ξ,P,N で表した．

散乱振幅の計算で必要となる1粒子波動関数は，以前に与えたスカラー場およびスピン $\frac{1}{2}$ の波動関数にそれぞれの質量を代入したものから得られる．

他の興味深い例として，非相対論的粒子の理論つまりシュレーディンガー場の理論がある．このとき，自由場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi^*\frac{\nabla^2}{2m}\psi \tag{5.56}$$

で与えられる．場の量子化は，非相対論的ボソンについては交換関係，非相対論的フェルミオンについては反交換関係をもちいて行うことができる．ここでは，例としてフェルミオンの場合を考えよう．正準1-形式により得られる反交換関係は

$$\begin{aligned}\{\psi(x^0,\boldsymbol{x}),\psi(x^0,\boldsymbol{y})\} &= 0,\\ \{\psi^\dagger(x^0,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger(x^0,\boldsymbol{y})\} &= 0,\\ \{\psi(x^0,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger(x^0,\boldsymbol{y})\} &= \delta^{(3)}(x-y)\end{aligned} \tag{5.57}$$

である．また1粒子波動関数は

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-iE_kx^0+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.58}$$

で与えられる．ここで，$E_k = k^2/2m$ である．場のモード展開は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_k a_k u_k(x),\\ \psi^\dagger(x) &= \sum_k a_k^\dagger u_k^*(x)\end{aligned} \tag{5.59}$$

で与えられる．ただし，

$$\{a_k, a_l\} = \{a_k^\dagger, a_l^\dagger\} = 0, \quad \{a_k, a_l^\dagger\} = \delta_{kl} \tag{5.60}$$

である．このとき，伝播関数は

$$S(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^0 - E_k + i\epsilon} e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{5.61}$$

で与えられる．$S(x,y)$ は $\partial_0 - i\nabla^2/2m$ の逆演算子である．

S 行列汎関数は

$$\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{N} \exp\left[-\int \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S(x,y) \frac{\delta}{\delta\psi^*(y)}\right] e^{i\mathcal{S}_{int}[\psi,\psi^*]} \tag{5.62}$$

で与えられる．ここで，ψ, ψ^* はグラスマン数の値をもつ関数である．

S 行列汎関数の汎関数微分は，以前に与えたウィックの定理をもちいて計算できる．フェルミオンのウィック定理は，グラスマン数の入れ換えに対する符号変化を除けば，ボソンの場合と同様に定義できる．(この符号変化は，フェルミオンの伝播関数を正しく導出するために必要であった.) 例えば，フェルミオン場 ψ, $\bar{\psi}$ に対して，

$$\mathcal{W}\,\psi(1)\bar{\psi}(2) = \psi(1)\bar{\psi}(2) + S(1,2) \tag{5.63}$$

と書ける．ただし，$\mathcal{W}$ はウィック縮約の演算子

$$\exp\left[-\int \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S(x,y) \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}\right] \equiv \mathcal{W} \tag{5.64}$$

である．フェルミオン場の積が $\bar{\psi}(2)\psi(1)$ の順序であれば，伝播関数は $-S(1,2)$ となる．これは，まず $\bar{\psi}(2)\psi(1) = -\psi(1)\bar{\psi}(2)$ と書いて場を伝播関数に現れる順序で並べかえ，次にこのペアを伝播関数とみなすことで理解できる．よって，同様に

$$\mathcal{W}\bar{\psi}(1)\psi(2)\bar{\psi}(3)\psi(4) = \bar{\psi}(1)\psi(2)\bar{\psi}(3)\psi(4)$$

$$
\begin{aligned}
&- S(2,1)\bar{\psi}(3)\psi(4) - \psi(2)\bar{\psi}(3)S(4,1) \\
&+ \bar{\psi}(1)\psi(4)S(2,3) - \bar{\psi}(1)\psi(2)S(4,3) \\
&+ S(2,1)S(4,3) - S(2,3)S(4,1) \qquad (5.65)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．上式では，可能なすべての場のペアが現れており，その符号 ± 1 はグラスマン数の値をもつ場の入れ換えの数によって決まる．この種の計算規則は，場の数が増えても簡単に拡張できる．

5.6　N 点関数の演算子公式

つぎに，相互作用がある場合の N 点関数を演算子の期待値として求めよう．まず，(5.10) と (5.11) の公式

$$
\begin{aligned}
Z_0[J] &= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\ J(x)G(x,y)J(y)\right], \\
Z[J] &= \mathcal{N}\exp\left[-i\lambda\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]Z_0[J]
\end{aligned}
\qquad (5.66)
$$

から始めよう．$Z_0[J]$ は自由スカラー場 N 点関数の生成汎関数なので，(5.5) の定義をもちいると

$$
Z_0[J] = \langle 0|T\exp\left[\int d^4x\ J(x)\phi_{in}(x)\right]|0\rangle \qquad (5.67)
$$

と書ける．ここで，$\phi_{in}(x)$ は**自由場**を表す．すなわち，これは

$$
\phi_{in}(x) = \sum_k a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) \qquad (5.68)
$$

と展開できる．($\phi_{in}(x)$ は「入射場 (in-field)」の演算子と呼ばれる．というのも，入射状態は真空にこの演算子が作用することによって構成されるからである．) $Z_0[J]$ の表現 (5.67) を (5.66) に代入し，行列要素のなかで汎関数微分を行うと，$Z[J]$ は

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \mathcal{N}\langle 0|Te^{\int J\phi_{in}}e^{-i\lambda\int\phi_{in}^4}|0\rangle \\
&= \mathcal{N}\langle 0|Te^{\int J\phi_{in}}e^{iS_{int}(\phi_{in})}|0\rangle \qquad (5.69)
\end{aligned}
$$

と表せる．J についての汎関数微分を N 回行い，J をゼロとすると

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle 0|T\phi_{in}(x_1)\phi_{in}(x_2)\cdots\phi_{in}(x_N)e^{i\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}|0\rangle \quad (5.70)$$

を得る．ここでは，相互作用をする理論のグリーン関数が自由場の期待値をもちいて表されている．同様な公式が，一般の場合（ラグランジアンにより一般化された相互作用項がある場合）にも得られることは明らかであろう．

入射場 ϕ_{in} をもちいて散乱演算子を表すこともできる．上の公式ではグリーン関数を ϕ_{in} で求めた．ここで時間成分 $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ を $-\infty$ とし，$x_{n+1}^0, \ldots, x_N^0$ を $+\infty$ とする．この極限では，時間順序積の性質より，公式 (5.70) は

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \\ \langle 0|T\,\phi_{in}(x_{n+1})\cdots\phi_{in}(x_N)T\,e^{i\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}\phi_{in}(x_1)\cdots\phi_{in}(x_n)|0\rangle \quad (5.71)$$

と表せる．ここで，相互作用項は時間的に $\pm\infty$ へ広がることはないと仮定した．$G(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ は（運動量表示ではなく座標表示であるが）散乱振幅を与えるので，散乱演算子は

$$\widehat{S} = T\,e^{i\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})} = U(\infty, -\infty), \\ U(x^0, y^0) = T\exp\left[i\int_{y^0}^{x^0} dz^0 \int d^3x\,\mathcal{L}_{int}(\phi_{in}(x))\right] \quad (5.72)$$

で与えられることがわかる．これは非常に簡単な公式である．つまり，S 演算子は，場 ϕ を**自由場の演算子** ϕ_{in} で置き換えると，作用の相互作用項の指数として与えられる．ここで定義された S 演算子は，ユニタリー性をもつ．また上の演算子 U は関係式

$$U(x^0, y^0)U(y^0, z^0) = U(x^0, z^0), \\ U^\dagger(x^0, y^0) = U(y^0, x^0) = U^{-1}(x^0, y^0) \quad (5.73)$$

をみたす．ただし，$x^0 \geq y^0 \geq z^0$ である．

入射場をもちいると，**相互作用のある場の演算子** ϕ を

$$\phi(x) = \phi_{in}(x) + i\int_y G_R(x, y)\,\rho(y) \quad (5.74)$$

と定義することもできる．ここで，$G_R(x, y)$ は遅延グリーン関数 (4.9) であ

り，ρ は

$$\rho(x) = -i\widehat{S}^{-1}\frac{\delta\widehat{S}}{\delta\phi_{in}(x)} \tag{5.75}$$

で定義される．ϕ_{in} についての汎関数微分は次のように理解できる．まず演算子 $\widehat{S}$ の ϕ_{in} を c 数で表される（演算子でない）関数 $\delta f(x)$ だけ変化させる．つまり，$\phi_{in} \to \phi_{in} + \delta f$ とする．このとき，汎関数微分は演算子の変分に現れる δf の係数で与えられる．言い換えると，汎関数微分は

$$\delta\widehat{S} \equiv \int_x \frac{\delta\widehat{S}}{\delta\phi_{in}(x)}\delta f(x) \tag{5.76}$$

で定義される．遅延グリーン関数は方程式 $(\Box+m^2)G_R(x,y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$ をみたすので

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \rho(x) \tag{5.77}$$

となる．逆に，(5.74) を遅延境界条件のもとでの上式の解と考えることもできる．($x^0 \to -\infty$ で $\phi \to \phi_{in}$ なので，遅延境界条件を課すことは妥当である.）ここで (5.74) をもちいると，ρ を ϕ_{in} ではなく ϕ で原理的には表せる．よって，運動方程式は完全に ϕ だけで表せることがわかる．以下では，上式がハイゼンベルクの運動方程式を与え，したがって (5.74) で定義される ϕ はハイゼンベルクの場の演算子そのものとみなせることを示そう．まず，(5.74) で定義される ϕ の解は

$$\phi(x) = U(-\infty, x^0)\phi_{in}(x)U(x^0, -\infty) \tag{5.78}$$

で与えられる．これは

$$\phi(x) = \phi_{in}(x) + U(-\infty, x^0)\Big[\phi_{in}(x), U(x^0, -\infty)\Big] \tag{5.79}$$

と書き換えることで確かめられる．$U(x^0, -\infty)$ は自由場 ϕ_{in} で定義されているので，交換子は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
&\Big[\phi_{in}(x), U(x^0, -\infty)\Big] \\
&\qquad = i\int_{-\infty}^{x^0} d^4y\ U(x^0, y^0)\varDelta(x,y)\left(\frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}{\delta\phi_{in}}\right)_y U(y^0, -\infty) \\
&\qquad = i\int d^4y\ G_R(x,y)U(x^0,y^0)\frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}{\delta\phi_{in}(y)}U(y^0,-\infty).
\end{aligned} \tag{5.80}$$

ここで，$G_R(x,y)=\theta(x^0-y^0)\Delta(x,y)$ をもちいた．よって，(5.73) をもちいて U をまとめると，(5.79) は

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_{in}(x)+i\int_y G_R(x,y)U(-\infty,y^0)\frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}{\delta\phi_{in}(y)}U(y^0,-\infty)\\ &= \phi_{in}(x)+i\int_y G_R(x,y)\frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi)}{\delta\phi(y)}\end{aligned}\tag{5.81}$$

となる．2 行目で (5.78) を再度もちいた．つぎに，$U(x^0,y^0)$ の定義 (5.72) より，

$$\rho(x)=-i\widehat{S}^{-1}\frac{\delta\widehat{S}}{\delta\phi_{in}(x)}=U(-\infty,x^0)\frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi_{in})}{\delta\phi_{in}}U(x^0,-\infty)\tag{5.82}$$

がわかる．これを (5.81) と比べると，(5.78) は実際に (5.74) の解であることがわかる．さらに，(5.74) と (5.78) から，ρ は相互作用をする場 ϕ で

$$\begin{aligned}\rho(x) &\equiv -i\widehat{S}^{-1}\frac{\delta\widehat{S}}{\delta\phi_{in}(x)}\\ &= \frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi)}{\delta\phi(x)}\end{aligned}\tag{5.83}$$

と表されることがわかる．この結果，(5.77) は作用 $\mathcal{S}=\int\frac{1}{2}[(\partial\phi)^2-m^2\phi^2]+\mathcal{S}_{int}(\phi)$ をもつ場のハイゼンベルクの運動方程式となる．言い換えると，(5.74) で定義される ϕ はこの章の始めに導入した演算子 ϕ と同定できる．

最後に，ϕ_{in} は自由場なので，その N 点関数は

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\,\phi_{in}(x_1)\phi_{in}(x_2)\cdots\phi_{in}(x_N)|0\rangle\\ &\qquad = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_N)}e^{\frac{1}{2}\int JGJ}\Bigg]_{J=0}\\ &\qquad = e^{\frac{1}{2}\int G\delta\delta}\,\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N)\Bigg]_{\varphi=0}\end{aligned}\tag{5.84}$$

と書けることに注意しよう．ただし，相互作用の項をゼロとし，(5.67) と (5.16) をもちいた．ϕ_{in} の N 点関数に対するこの公式と式 (5.19) から，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F}[\varphi]=\mathcal{N}\langle 0|T\exp\left[i\mathcal{S}_{int}(\phi_{in}+\varphi)\right]|0\rangle\tag{5.85}$$

と表せることがわかる.

参考文献

1. S 行列の概念は W. Heisenberg, *Zeits. für Phys.* **120**, 513, 673 (1943) による. S 行列の摂動計算の共変的な手法はシュウィンガー, 朝永, ファインマン, ダイソン他による. 原論文については J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958) を参照されたい.

2. 本章冒頭のハイゼンベルク描像をもちいた S 行列の議論は C.N. Yang and D. Feldman, Phys. Rev. **79**, 972 (1950) による. この議論は, より完全な LSZ 定式化を導いた. この定式化は H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmerman, Nuovo Cimento, **1**, 1425 (1955); *ibid.* **2**, 425 (1955); *ibid.* **6**, 319 (1957) による. 簡約公式および入射場もこの論文で導入された.

3. N 点関数の演算子公式は M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951) による.

4. S 行列汎関数の定義は I. Ya Aref'eva, A.A. Slavnov and L.D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **21**, 1165 (1974) で与えられた. 関連文献として L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields, Introduction to the Quantum Theory*, Benjamin-Cummings, MA (1980) も参照されたい.

第 6 章
電磁場

6.1　量子化と光子

電磁場の作用は

$$\mathcal{S} = \int -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu = \int \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - A_0 J_0 + A_i J_i \tag{6.1}$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \\ F_{0i} &= E_i\,, \qquad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \tag{6.2}$$

である．A_μ は 4 元ベクトルポテンシャルである．A_μ の変分をとると，この作用の運動方程式はマクスウェル方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{6.3}$$

となる．これを成分表示すると

$$\partial_i E_i = J_0, \tag{6.4}$$

$$\partial_0 E_i + \epsilon_{ijk}\partial_j B_k = J_i \tag{6.5}$$

となる．$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ であるので，整合性のため，A_μ が結合するカレント J^μ は保存しなければならないことに注意しよう．すなわち，

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{6.6}$$

である．

電磁場を量子化するには，関連した次の2点について考えなければならない．2つのベクトルポテンシャル A_μ と $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$（ただし，$\theta$ はあるスカラー関数）があるとき，これらに対応する電磁場は不変，つまり $F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(A')$ であることに注意しよう．したがって，A_μ によって電磁場を記述する際には，違う場が同じ物理的状態を重複して記述する．よって，量子化の規則を適用する前に，まずこの重複した自由度を除く必要がある．また，式 (6.4) がハイゼンベルクの運動方程式として実現できないことに注意しよう．ハイゼンベルクの運動方程式は，ある演算子 C に対して，$\partial_0 C = \cdots$ の形をとる．式 (6.5) から，A_i の運動方程式は2階の時間微分方程式であることがわかる．したがって，$E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ と A_i は，ある固定時刻における相空間の変数を成す．これらの変数の初期値が特定されれば，その時間発展は (6.5) で与えられる．式 (6.4) は，これら相空間変数の時間微分を含まないので，これをハイゼンベルクの運動方程式として求めることはできない．

重複した変数を取り除くには次のようにすればよい．まず，$A_0 = 0$ と選ぶことができる．というのも，もし A_0 がゼロでなければ，物理的に等価なポテンシャル $A'_0 = A_0 + \partial_0\theta$, $A'_i = A_i + \partial_i\theta$ において θ を $\partial_0\theta = -A_0$ と選ぶと，$A'_0 = 0$ とゼロでない A'_i を得ることができ，この A'_i を A_i と再定義できるからである．よって，A_i は

$$A_i = A_i^T + \partial_i f \tag{6.7}$$

と分解できる．ここで，A_i^T は「横波」成分である．つまり，A_i^T は条件 $\partial_i A_i^T = 0$ に従う．これより，関係式 $E_i = \partial_0 A_i^T + \partial_i(\partial_0 f)$ が得られる．また，式 (6.4) は $\partial_i\partial_i(\partial_0 f) = J_0$ となる．すなわち

$$\begin{aligned} \partial_0 f &= \int d^3y\, G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) J_0(x^0, \boldsymbol{y}), \\ \partial_i\partial_i G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= \delta^{(3)}(x-y), \\ G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \end{aligned} \tag{6.8}$$

である．$G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ はクーロン–グリーン関数と呼ばれる．$\partial_i f$ の回転 (rot) はゼロなので，$B_i(A) = B_i(A^T)$ である．また，$A_i J_i$ の項は

$$\int d^4x\, A_i J_i = \int d^4x\, (A_i^T J_i + \partial_i f J_i) = \int d^4x\, (A_i^T J_i - f\partial_i J_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4x\,(A_i^T J_i - f\partial_0 J_0) = \int d^4x\,(A_i^T J_i + \partial_0 f J_0) \\
&= \int d^4x\, A_i^T J_i \\
&\quad + \int dx^0 d^3x d^3y\ J_0(x^0, \boldsymbol{x}) G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) J_0(x^0, \boldsymbol{y})
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

と表せる．式 (6.7)–(6.9) を作用 (6.1) に代入し，部分積分を行うと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = &\int d^4x\, \frac{1}{2}\left[\partial_0 A_j^T \partial_0 A_j^T - \partial_i A_j^T \partial_i A_j^T\right] \\
&+ \int d^4x d^4y\ \frac{1}{2} J_0(x) G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \delta(x^0 - y^0) J_0(y) + \int d^4x\, A_i^T J_i
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

となる．ここで，J_0 に関する項に時間成分の δ 関数を導入し，積分測度が共変になるようにした．(6.10) は，2 つの横波方向つまり A_i^T の偏極に対応する質量のない 2 つの場に対する作用と同じである．(物理的な場 A_i^T が従うべき 2 つの条件式 $A_0 = 0$ と $\nabla \cdot A = 0$ の組み合わせは，放射ゲージと呼ばれる.) カレント J^μ がないとき，運動方程式は

$$
\Box A_i^T = 0 \tag{6.11}
$$

となる．これは (6.5) と同じである．この方程式の一般解は

$$
\begin{aligned}
A_i^T(x) &= \sum_{k\lambda} a_{k\lambda} e_i^{(\lambda)} u_k(x) + a_{k\lambda}^\dagger e_i^{(\lambda)} u_k^*(x), \\
u_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx}
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

と書ける．ここで，$\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2}$ であり，ベキ指数の kx はいままでどおり $k_0 x_0 - k_i x_i$ を表す．$e_i^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2)$ は k_i（あるいは ∂_i）と垂直な 2 つの独立な単位ベクトルである．これより，条件 $\partial_i A_i^T = 0$ がみたされる．ほとんどの場合，この単位ベクトルの具体的な形は必要でないが，もし必要であるなら，

$$
\begin{aligned}
e^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_2, -k_1, 0), \\
e^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}} (k_1 k_3, k_2 k_3, -(k_1^2 + k_2^2))
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

を使うことができる．$e_i^{(3)} = k_i/\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}$ を加えると，これらは 3 成分の正規

直交系を成す．また，関係式

$$\sum_{\lambda=1,2} e_i^{(\lambda)} e_j^{(\lambda)} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}\right) \tag{6.14}$$

が成り立つ．これは次のように理解できる．$k_i e_i = 0$ なので，右辺は $k_i P_{ij} = 0$, $k_j P_{ij} = 0$ をみたす対称テンソル P_{ij} でなければならない．したがって，P_{ij} は $(\delta_{ij} - k_i k_j/\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})$ に比例しなければならない．その比例定数は，トレースを計算すると，1 になることがわかる．

量子論では，(6.12) の係数 $a_{k\lambda}, a_{k\lambda}^{\dagger}$ は演算子である．正準交換関係は，(6.10) から正準 1-形式を通して導くことができる．また，作用が本質的に（たとえ場の変換則が異なるとしても）2 つのスカラー場であることに注意すると，同様に正準交換関係を導くことができ，

$$\begin{aligned} \left[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}\right] &= 0, \\ \left[a_{k\lambda}^{\dagger}, a_{k'\lambda'}^{\dagger}\right] &= 0, \\ \left[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^{\dagger}\right] &= \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \tag{6.15}$$

となることが簡単にわかる．カレントがない自由場の場合はスカラー場が 2 つの理論とみなせるので，このときハミルトニアンは

$$H = \sum_{k\lambda} \omega_k a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda} \tag{6.16}$$

となる．スカラー場のときと同様に，ローレンツ不変性の要請により，演算子の順序はゼロ点または真空のエネルギーがゼロとなるように選ばれる．

真空状態は $a_{k\lambda}|0\rangle = 0$ をみたす．スカラー場で詳しく見たように，この多粒子状態も同様に構成できる．いまの場合，粒子は質量をもたない $(\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}})$ ので，$\boldsymbol{k}$ に直交する 2 方向の偏極がある．この粒子は光子である．$a_{k\lambda}^{\dagger}$ は，波数ベクトルまたは運動量 $\boldsymbol{k}$ および偏極 λ をもつ光子の生成演算子である．

伝播関数は

$$\begin{aligned} D_{ij}(x,y) &= \langle 0|T A_i^T(x) A_j^T(y)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}\right) \frac{i}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \end{aligned} \tag{6.17}$$

として求められる．これは，その形からわかるように，共変でない．理論の相互作用が $A_\mu J^\mu$ の形で与えられたとすると，作用の相互作用部分は，余分な変数を除去したのちに

$$\mathcal{S}_{int} = \int d^4x d^4y\ \frac{1}{2} J_0(x) G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \delta(x^0-y^0) J_0(y) + \int d^4x\, A_i^T J_i \quad (6.18)$$

となる．S 行列汎関数は

$$\mathcal{F}(A) = \exp\left[\frac{1}{2}\int D_{ij}(x,y) \frac{\delta}{\delta A_i^T(x)} \frac{\delta}{\delta A_j^T(y)}\right] e^{iS_{int}} \quad (6.19)$$

と書き下せる．光子の伝播関数が現れるのはカレントについて 2 次の項からである．これらの 2 次の項は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(2)} = i \int d^4x d^4y\ \frac{1}{2} J_0(x) G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \delta(x^0-y^0) J_0(y) \\ - \frac{1}{2}\int d^4x d^4y\ J_i(x) D_{ij}(x,y) J_j(y)\end{aligned} \quad (6.20)$$

で与えられる．伝播関数の $k_i k_j / \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ 部分は

$$\begin{aligned}\int_{x,y} J_i(x) J_j(y) \int_k \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon} &= \int_{x,y} \partial_i J_i(x) \partial_j J_j(y) \int_k \frac{1}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon} \\ &= \int_{x,y} \partial_0 J_0(x) \partial_0 J_0(y) \int_k \frac{1}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon} \\ &= \int_{x,y} J_0(x) J_0(y) \int_k \frac{k_0^2}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon}\end{aligned} \quad (6.21)$$

と表される．ただし，カレントの保存則 (6.6) をもちいた．$G_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ が $-(1/\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})$ のフーリエ変換であることに注意して，(6.20), (6.21) をもちいると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(2)} &= \frac{1}{2}\int d^4x d^4y \Big[J_0(x) J_0(y) \int_k \frac{i}{k^2+i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ &\qquad - J_i(x) J_j(y) \int_k \frac{i}{k^2+i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \Big] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x d^4y\ J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y),\end{aligned} \quad (6.22)$$

$$D_{\mu\nu}(x,y) = \eta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2+i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (6.23)$$

を得る．したがって，保存カレントに作用する伝播関数は共変な形 $D_{\mu\nu}(x,y)$ にとることができる．(この形においても，J^μ が保存するので，$\partial_\mu\partial_\nu$ に比例する項を $\eta_{\mu\nu}$ に加えることができる．この自由度はゲージ選択の自由性と関連しており，その詳細については 10 章で議論する.）上の結果は，共変な相互作用項に共変なウィック縮約を施したときに得られる項，すなわち

$$\mathcal{F}^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_{x,y} D_{\mu\nu}(x,y)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{i^2}{2!}\int A_\mu J^\mu \int A_\nu J^\nu \tag{6.24}$$

と同じである．S 行列汎関数において光子の伝播関数が現れるすべての項に対しても，同様な議論を行うことができる．(ここではその詳細については議論しないが，汎関数積分を導入すると，これらの問題はより簡単で明確になる[1].）偏極ベクトルを時間成分がゼロ，空間成分が $\boldsymbol{k}$ に直交するベクトルであると理解すると，入射・放射光子に対しても，相互作用を共変な形で表すことができる．したがって，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} D_{\mu\nu}(x,y)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\right)e^{i\int A_\mu J^\mu} \tag{6.25}$$

ととれる．

6.2　荷電粒子との相互作用

電磁場と荷電粒子の結合は，最小結合 (minimal coupling) の原理に従う．これは次のように定式化できる．電磁場をゲージポテンシャル A_μ で記述する際に，変数に重複した自由度が現れるのをみた．つまり，A_μ と $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$ は同じ電磁場を導くので，物理的には同等である．$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$ はゲージ変換を与え，マクスウェル方程式はこのゲージ変換のもとで保存する．この不変性は，電磁相互作用において，かぎとなる重要な原理である．荷電粒子の場との結合においても，この不変性は成り立たなければならない．

ここで，複素スカラー場を考えよう．自由場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* \tag{6.26}$$

1　［訳註］汎関数積分については 8 章を参照されたい．

で与えられる．この理論は $\phi \to e^{-iQ\theta}\phi$ の変換のもとで不変である．ただし，θ は x^μ によらない．つまり，$\mathcal{L}(e^{-iQ\theta}\phi) = \mathcal{L}(\phi)$ となる．すでにみたように，これは保存カレントを導き，Q はこのカレントで与えられる粒子の電荷を表す．このとき，対称性は局所的となる．すなわち，θ が x^μ の関数であると拡張して考えることができる．$\partial_\mu(e^{-iQ\theta}\phi) = e^{-iQ\theta}(\partial_\mu - iQ\partial_\mu\theta)\phi$ となるので，場の微分を含むラグランジアン (6.26) の項は，明らかに不変ではない．しかしながら，A_μ をもちいると，次のような組み合わせを考えることができる．

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + iQA_\mu\phi. \tag{6.27}$$

このとき，

$$D_\mu(A')\phi' = e^{-iQ\theta}D_\mu(A)\phi, \tag{6.28}$$

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta,$$

$$\phi' = e^{-iQ\theta}\phi \tag{6.29}$$

となる．すなわち，ϕ の位相変換と A_μ のゲージ変換を組み合わせると，θ が局所的に x に依存しても，$D_\mu\phi$ は，斉次（あるいは共変）に変換する．実際，ϕ の位相変換は物質場 ϕ のゲージ変換とみなすことができる．この $D_\mu\phi$ は共変微分と呼ばれる．これは共変に変換するので，ラグランジアン (6.26) の微分 $\partial_\mu\phi$ を $D_\mu\phi$ で置き換えると，ラグランジアンはゲージ変換 (6.29) のもとで不変となり，ϕ, ϕ^* と電磁場間の相互作用項が現れる．これは**ゲージ原理**と呼ばれ，次のようにまとめることができる．

> 荷電粒子の場は，場の座標によらない位相変換のもとで不変なラグランジアンをもつ．ラグランジアンのすべての微分を共変微分に置き換えると，この対称性は局所的となる．その結果，ラグランジアンはゲージ不変となり，ラグランジアンには電磁場との相互作用項が自然に組み込まれる．

この原理を荷電スカラー場に適用すると

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$$

$$= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* + \mathcal{L}_{int} \,, \tag{6.30}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -iQA^\mu \left(\phi^* \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^* \phi \right) + Q^2 A^\mu A_\mu \phi \phi^*$$

となる．このとき，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F} = \exp\left[\int_{x_1, x_2} G(x_1, x_2) \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \frac{\delta}{\delta \varphi^*(x_2)} \right] \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} D_{\mu\nu}(x,y) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \right) e^{iS_{int}} \tag{6.31}$$

で与えられる．ここで，光子の共変な伝播関数をもちいた．共変な伝播関数の使用は，相互作用が保存カレント J^μ をもちいて $A_\mu J^\mu$ と書けるときにのみ正当化されたのだが，ここでの共変伝播関数の使用は，実は正しい．式 (6.31) の正当性については，汎関数積分を定義すると自然に理解できるので，いまの段階では，これについて証明はせずに仮定するにとどめよう．

つぎに，ゲージ原理の有効性についてコメントしよう．まず，この原理はすべての荷電素粒子について成り立つ．実際，これは電磁相互作用を定義する主導原理となっている．（また，適切な一般化により，他の相互作用にも適用できる．）この原理はまた，A_μ の長波長モードと結合する荷電複合粒子にも適用される．ここで，長波長モードとは複合粒子のサイズに比べて大きな波長をもつ電磁場のモードのことである．A_μ が短波長のモードをもつときは，有効相互作用を複合粒子の性質の詳細から導かなければならない．その一例として，中性子がある．この粒子は電気的に中性であるが，磁気モーメントをもつ．電磁場との結合は $c\bar{N}\gamma_\mu\gamma_\nu NF^{\mu\nu}$ で与えられる．ただし，N は中性子の場であり，c は中性子が 3 つのクォークの束縛状態であることから決まる定数である．この相互作用が最小結合の形で書かれていないのは明らかであろう．もう 1 つの例として，電磁気的に 2 光子へ崩壊する中性 π 中間子（パイオン）がある．この場合，ラグランジアンの有効相互作用項は

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{e^2}{4\pi^2 f_\pi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \, \phi \tag{6.32}$$

で与えられる．ここで，f_π はパイオン崩壊定数と呼ばれ，ϕ はパイオンの場を表す．この相互作用も最小結合の形ではない．これはパイオンがクォークと反クォークで構成され，各クォーク自体が電磁場と最小に結合しているこ

とから導かれる．これについては，量子異常をもちいて後で導出しよう[2]．

6.3　量子電磁力学 (QED)

量子電磁力学 (QED) は一般に電子，陽電子，電磁場の相互作用を与える理論である．電子と陽電子はディラックのスピノール場で記述され，そのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi \tag{6.33}$$

で与えられる．このラグランジアンは座標によらない位相変換 $\psi \to e^{ie\theta}\psi$ のもとで不変である．共変微分は

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi \tag{6.34}$$

と表せる．これは $Q = -e$ に対応しており，これより ψ が電荷 $-e$ をもつ電子の消滅および電荷 e の陽電子の生成を記述すると解釈できる．この相互作用の理論にゲージ原理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma \cdot D - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \,, \\ \mathcal{L}_{int} &= e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned} \tag{6.35}$$

となる．相互作用項が $A^\mu J_\mu$ の形で書けることに注意しよう．したがって，量子電磁力学 (QED) の S 行列汎関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \exp&\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} D_{\mu\nu}(x,y)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\right) \\ &\times \exp\left[-\int \frac{\delta}{\delta \psi_r(x)} S_{rs}(x,y)\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_s(y)}\right] e^{ie\int A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi} \end{aligned} \tag{6.36}$$

と表せる．また，QED の S 行列の演算子公式は

$$\hat{S} = T\exp\left(ie\int A_{\mu\, in}\bar{\psi}_{in}\gamma^\mu \psi_{in}\right) \tag{6.37}$$

---

[2] ［訳註］量子異常については 13 章を参照されたい．

と書ける．ここで，入射場 $A_{\mu\,in}$ はモード展開 (6.12) で与えられ，伝播関数は (6.23) で与えられる．フェルミオン場のモード展開は

$$\psi_{in}(x) = \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[a_{p,r}\, u_r(p) e^{-ipx} + b^{\dagger}_{p,r} v_r(p) e^{ipx}\right], \tag{6.38}$$

$$\bar{\psi}_{in}(x) = \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[a^{\dagger}_{p,r} \bar{u}_r(p) e^{ipx} + b_{p,r} \bar{v}_r(p) e^{-ipx}\right] \tag{6.39}$$

で表され，その伝播関数は (4.41)，つまり

$$S(x,y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \tag{6.40}$$

で与えられる．

参考文献

1. 本章で扱った非共変的な電磁場の量子化はディラックによるもので，その原論文は，J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958) から参照できる．共変な演算子による量子化は次の論文で発展された．E. Fermi, Lincei Ren. **9**, 881 (1929); Rev. Mod. Phys. **4**, 87 (1932); S.N. Gupta, Proc. Roy. Soc. **63** 681 (1950); *ibid.* **64**, 850 (1951); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1950); K. Bleuler and W. Heitler, Prog. Theor. Phys. **5**, 600 (1950)．本章ではこれらについて議論しなかったが，これは，10 章で導入するファデーエフ–ポポフ (Faddeev–Popov) 形式および BRST 形式をもちいると，より効率的に議論できるためである．

第 7 章

散乱過程の例

7.1　光子と荷電スカラー粒子の散乱

光子と電子の散乱は歴史的にコンプトン散乱と呼ばれる．ここでは，電子の代わりに荷電スカラー粒子をもちいて同じ散乱過程を考えよう．これは，スカラー・コンプトン散乱と名づけられる．光子と結合する荷電粒子の S 行列汎関数は

$$\mathcal{F} = \exp\left[\int_{x_1,x_2} G(x_1,x_2)\frac{\delta}{\delta\varphi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi^*(x_2)}\right] \times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} D_{\mu\nu}(x,y)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\right)e^{i\mathcal{S}_{int}}\,, \tag{7.1}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -ieA^\mu\left(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\varphi\right) + e^2A^\mu A_\mu\varphi\varphi^*$$

で与えられる．自明でない散乱は e の 2 次の項から始まり，そのとき関連する $\mathcal{F}$ の項は

$$\mathcal{F} = e^2\int A^\mu(x)A^\nu(y)\left(\varphi^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu G(x,y)\overleftrightarrow{\partial}_\nu\varphi(y)\right) + ie^2\int A^2\varphi^*\varphi \tag{7.2}$$

で与えられる．ここで，$f\overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f\partial_\mu g - \partial_\mu f\, g$ である．入射光子と放射光子の運動量をそれぞれ k と k' で表し，荷電粒子の運動量をそれぞれ p と p' で表すと，一般公式 (5.24) で与えられる散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{V^2\sqrt{2\omega 2\omega' 2E_p 2E_{p'}}}\mathcal{M},$$

$$\mathcal{M}=ie^2\Bigg[2e^{(\lambda)}(k)\cdot e^{(\lambda')}(k')-\frac{(2p'-k)\cdot e^{(\lambda)}(k)(2p-k')\cdot e^{(\lambda')}(k')}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}$$
$$-\frac{(2p'+k')\cdot e^{(\lambda')}(k')(2p+k)\cdot e^{(\lambda)}(k)}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}\Bigg] \tag{7.3}$$

となることがわかる．$p^2-m^2=0$ および $k^2=0$ などから，$(p-k')^2-m^2=p^2-m^2+k'^2-2p\cdot k'=-2p\cdot k'$ などとなる．さらに，$k\cdot e^{(\lambda)}(k)=0$, $k'\cdot e^{(\lambda')}(k')=0$ なので，上式は

$$\mathcal{M}=2ie^2\left[e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')}+\frac{p\cdot e^{(\lambda')}\,p'\cdot e^{(\lambda)}}{p\cdot k'}-\frac{p\cdot e^{(\lambda)}\,p'\cdot e^{(\lambda')}}{p\cdot k}\right] \tag{7.4}$$

と変形できる．ここで，$e^{(\lambda)}, e^{(\lambda')}$ は $e^{\lambda}(k), e^{\lambda'}(k')$ を表す．散乱断面積は，入射荷電粒子の静止系で計算すると特に簡単になる．この場合，$p=(m,0,0,0)$ となり，偏極ベクトルは時間成分をもたないので $p\cdot e^{(\lambda)}=p\cdot e^{(\lambda')}=0$ となる．よって，放射粒子の運動量が微小範囲に収まるときの微分散乱確率は

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{\tau}=4e^4\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{16\omega\omega' E_pE_{p'}V}(e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')})^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{7.5}$$

となる．フラックスは $F=\sqrt{(p\cdot k)^2}/VE_p\omega=1/V$ で与えられる．したがって，微分断面積は

$$d\sigma=\frac{e^4}{4}\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{\omega\omega' mE'}(e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')})^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{7.6}$$

となる．ここで，$E'=E_{p'}$ である．p' 積分は，$\boldsymbol{p}'$ を $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ とみなすと，簡単に実行できる．さらに，散乱角 θ を $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'=\omega\omega'\cos\theta$ で定義すると，上式は

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{\omega'(e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')})^2}{\omega mE'}\delta(m+\omega-\omega'-E')d\omega' d\Omega \tag{7.7}$$

となる[1]．上式の残りの積分も簡単に実行できる．δ 関数は，ω' に直接あるいは $E'=\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+m^2}=\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2+m^2}=\sqrt{\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta+m^2}$ を通して間接に依存している．

$$\frac{d(\omega'+E')}{d\omega'}=\frac{E'+\omega'-\omega\cos\theta}{E'} \tag{7.8}$$

1 ［訳註］ここで，$d\Omega$ は微小立体角を表す．

となるので，ω' 積分を実行すると

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{m}\frac{\omega'}{\omega}\frac{(e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')})^2}{(E'+\omega'-\omega\cos\theta)}\,d\Omega \tag{7.9}$$

を得る．ここで，$\alpha = e^2/4\pi$ は微細構造定数であり，ω' は $m+\omega = E'+\omega'$ で与えられる．よって，$(m+\omega-\omega')^2 = E'^2 = \omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta+m^2$ となるので，

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{m}{m+\omega(1-\cos\theta)} \tag{7.10}$$

と書ける．この結果から，$E'+\omega'-\omega\cos\theta = m(\omega/\omega')$ となることがわかる．したがって，

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2(e^{(\lambda)}\cdot e^{(\lambda')})^2 d\Omega \tag{7.11}$$

となる．これは入射光子と放射光子の偏極が指定されるときの散乱断面積である．もし入射光子のビームが偏極を受けていないとすると，入射光子の偏極について平均をとらなければならない．同様に，放射光子の偏極を特定せず，すべての偏極についての断面積だけを考えるならば，放射光子の偏極について和をとらなければならない．この場合，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{unpol} &= \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2(1+\cos^2\theta)\end{aligned} \tag{7.12}$$

となる．ここで，偏極ベクトルの関係式

$$\sum_{\lambda} e_i^{\lambda}(k)e_j^{\lambda}(k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right) \tag{7.13}$$

をもちいた．

全散乱断面積を求めるには，散乱角で積分すればよく，

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left[\frac{4}{1+2x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2(1+x)}{x^3}\log(1+2x)\right] \tag{7.14}$$

を得る．ただし，$x = \omega/m$ である．x が小さいとき，対数を展開すると

$$\sigma \approx \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \tag{7.15}$$

を得る．これは，古典的なトムソン散乱の断面積と一致する．また，$\omega \gg m$ あるいは x が大きい場合は，

$$\sigma \approx \frac{2\pi\alpha^2}{xm^2} \tag{7.16}$$

となる．

7.2　クーロン場での電子散乱

この散乱過程はモット散乱として知られている．電磁場での電子の相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^{ext} \tag{7.17}$$

で与えられる．このとき，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F} = \exp\left[-\int \frac{\delta}{\delta\psi_r(x)} S_{rs}(x,y) \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_s(y)}\right] e^{ie\int A_\mu^{ext}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi} \tag{7.18}$$

となる．入射電子の運動量を p，スピン状態を α とし，放射電子の運動量を p'，スピン状態を β とすると，結合定数 e の最低次のオーダーで，散乱振幅は

$$\mathcal{A} = ie\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\bar{u}_{\beta p'}\gamma^\mu u_{\alpha p}\int d^4x A_\mu^{ext}(x) e^{-i(p-p')x} \tag{7.19}$$

となる．外場として，遮蔽されたクーロンポテンシャル

$$A_0 = \frac{Ze}{r}e^{-ar}, \quad A_i = 0 \tag{7.20}$$

を考えよう．遮蔽されたポテンシャルをもちいると，(7.19) の積分が簡単になる．最終的に $a \to 0$ の極限をとればよい．

$$\int d^3x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{Ze}{r}e^{-ar} = \frac{4\pi Ze}{q^2+a^2} \tag{7.21}$$

をもちいて，$a \to 0$ の極限をとると，

$$\mathcal{A} = ie\frac{m}{EV}\frac{4\pi Ze}{q^2}\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0 u_{\alpha p} 2\pi\delta(E-E') \tag{7.22}$$

となることがわかる．ここで，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$ である．これを 2 乗し，δ 関数の 1 つが総時間 τ で置き換えられることを思い出すと，

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{\tau} = \frac{(4\pi Ze^2)^2}{q^4}\frac{m^2}{E^2V^2}|\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0 u_{\alpha p}|^2 2\pi\delta(E-E') \tag{7.23}$$

を得る．ポテンシャルの源（ソース）は静止しているので，フラックスは $F=|\boldsymbol{p}|/EV$ となる．よって，散乱断面積は

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{|\mathcal{A}|^2}{\tau}\frac{EV}{|\boldsymbol{p}|}V\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{4(Ze^2)^2m^2}{q^4E|\boldsymbol{p}|}|\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0u_{\alpha p}|^2\delta(E-E')p'^2dp'd\Omega
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

と求まる．$\delta(E-E')$ であるので，$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|$ でなければならない．さらに，$E'=\sqrt{p'^2+m^2}$ から $E'dE'=p'dp'$ がわかる．これらをもちいると，δ 関数のため p' 積分は簡単に実行でき，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4(Ze^2)^2m^2}{q^4}|\bar{u}^{\beta}_{p'}\gamma^0u^{\alpha}_{p}|^2 \\
&= \frac{(Ze^2)^2m^2}{4|\boldsymbol{p}|^4\sin^4(\theta/2)}|\bar{u}^{\beta}_{p'}\gamma^0u^{\alpha}_{p}|^2
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

となることがわかる．ただし，$q^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p}'-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'=2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}(1-\cos\theta)=4|\boldsymbol{p}|^2\sin^2(\theta/2)$ をもちいた．電子の入射方向と放射方向の成す角度 θ は散乱角と呼ばれる．

上の結果は，入射電子のスピンが特定されている（つまり，入射ビームが偏極を受けている）場合である．また，散乱後の電子についても，そのスピンは特定されている．もし偏極のない入射ビーム（電子線）をもちい，散乱電子のスピンに関係なく観測が行われるとすると，入射スピンについて平均をとり，さらに散乱後のスピンについて和をとらなければならない．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\beta=1,2}|\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0u_{\alpha p}|^2 \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\beta=1,2}\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0u_{\alpha p}\bar{u}_{\alpha p}\gamma^0u_{\beta p'} \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\left[u_{\alpha p}\bar{u}_{\alpha p}\gamma^0u_{\beta p'}\bar{u}_{\beta p'}\gamma^0\right] \\
&\quad= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}\left[(m+\gamma\cdot p)\gamma^0(m+\gamma\cdot p')\gamma^0\right] \\
&\quad= \frac{1}{8m^2}\left[4m^2+4p_\mu p'_\nu(\eta_{\mu0}\eta_{\nu0}-\eta_{\mu\nu}\eta_{00}+\eta_{\nu0}\eta_{\mu0})\right] \\
&\quad= \frac{1}{2m^2}\left[E^2+m^2+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{E^2}{m^2}\left[1 - v^2 \sin^2(\theta/2)\right] \tag{7.26}$$

と計算できる．ここで，$v = |\boldsymbol{p}|/E$ は入射電子の速度である．この関係式をもちいると，偏極のない場合の散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4E^2v^4\sin^4(\theta/2)}\left(1 - v^2\sin^2(\theta/2)\right) \tag{7.27}$$

となる．

$v \ll 1$ のとき，上式は古典的ラザフォード散乱の断面積を与える．$(1 - v^2\sin^2(\theta/2))$ の因子は，電子のスピンによる項である．(電子の静止系では電磁場の源は動いている．したがって，電子は磁場にさらされ，電子のスピンはこの磁場と相互作用をもつ．)

散乱断面積は $\theta = 0$ で発散する．これは，(7.21) からわかるように，クーロンポテンシャルが無限遠にまで効くことと関係している．この発散は，実際の観測においては，有限な角度分解能をもつ検出器をもちいることで問題なく取り除くことができる．

7.3　媒質中での低速中性子散乱

結晶や液体における中性子の散乱過程は，これらの媒質の特性を研究するのに大いに役立つ．通常，このような問題は，多粒子系の量子力学をもちいて議論されるが，場の理論をこの問題に適用することもできる．中性子と原子核の相互作用は

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda \bar{N} N \bar{P} P \tag{7.28}$$

で表せる．ここで，P は，例えば，結晶中に束縛されている原子核を表す．S 行列要素は，S 行列汎関数に現れる c 数の場を粒子の波動関数で置き換えることで得られる．これまで，入射・放射粒子を自由粒子とみなし，自由場の波動関数をもちいてきた．しかし，いまの場合，原子核に対して自由場の波動関数をもちいることはできない．なぜなら，結晶中での散乱の場合，原子核あるいは陽イオンは結晶に束縛されているので，その波動関数は束縛型の波動関数でければならないためである．これを $\Psi(x)$ で表すと，λ の最低次で，散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \frac{i\lambda}{V} \int e^{-iqx}\, \Psi_f^*(x)\, \Psi_i(x) \tag{7.29}$$

となる．ここで，$q = k - k'$ であり，k, k' は中性子の入射・放射運動量を表す．また Ψ の添え字 i, f は，核子の始状態，終状態を表す．ここでは，中性子の波動関数として，非相対論的な波動関数をもちいた．

まず，格子結晶の場合を考えてみよう．このとき，核子の波動関数は格子点上で振動するイオンに対応する．格子点の位置を $\boldsymbol{a}_n$ で表すと，波動関数は

$$\Psi(x) = e^{-iEx^0}\psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n) \tag{7.30}$$

となる．E は結晶の状態エネルギーである．上式を使うと，

$$\begin{aligned}
&\int d^3x e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\, \Psi_f^*(x)\, \Psi_i(x) \\
&\quad = e^{i(E_f - E_i)x^0} \int d^3x\ \psi_f^*(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n)\psi_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n) e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_n)} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}_n} \\
&\quad = e^{i(E_f - E_i)x^0} \langle f | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n} | i \rangle e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}_n}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{\xi}_n$ は格子点 $\boldsymbol{a}_n$ にある粒子（イオン）の位置演算子である．中性子は格子点上の任意のイオンと散乱するので，全散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \frac{i\lambda}{V} 2\pi\delta(q_0 + E_i - E_f) \sum_n \langle f | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n} | i \rangle e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}_n} \tag{7.32}$$

となる．入射フラックスは k/mV なので，散乱断面積は

$$\begin{aligned}
&d\sigma = \\
&\frac{\lambda^2 m}{k} \sum_{nm} 2\pi\delta(q_0 + E_i - E_f) \langle i | e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m} | f \rangle \langle f | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n} | i \rangle e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m)} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}
\end{aligned} \tag{7.33}$$

となる．通常，散乱後の結晶の状態として特定の状態が選ばれることはまれなので，求める断面積は散乱後の結晶の状態によらない．つまり，終状態について和をとらなければならない．このとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_f 2\pi\delta(q_0 + E_i - E_f) \langle i | e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m} | f \rangle \langle f | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n} | i \rangle \\
&\qquad = \sum_f \int dz^0 e^{-i(q_0 + E_i - E_f)z^0} \langle i | e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m} | f \rangle \langle f | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n} | i \rangle
\end{aligned}$$

$$= \int dz^0 e^{-iq_0 z^0} \sum_f \langle i|e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m}|f\rangle\langle f|e^{iHz^0}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n}e^{-iHz^0}|i\rangle$$

$$= \int dz^0 e^{-iq_0 z^0} \langle i|e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m(0)}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n(z^0)}|i\rangle \tag{7.34}$$

を得る．ここで，完全性の関係式 $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ をもちいた．また，$\boldsymbol{\xi}_n(z^0) = e^{iHz^0}\boldsymbol{\xi}_n e^{-iHz^0}$ は時間に依存したハイゼンベルク表示の位置演算子を表す．最後に，始状態がある純粋な状態に特定されることはほとんどない．むしろ，格子全体が振動している熱励起状態であることが多い．これを実現するには，すべての始状態 $|i\rangle$ について確率 c_i の重みを与えて和をとればよい．あるいは，密度行列 $\rho = \sum_i c_i|i\rangle\langle i|$ をもちいて，始状態の平均をとればよい．(7.34) をもちいて，この平均をとると

$$d\sigma = \frac{\lambda^2 m}{k} \int dz^0 e^{-iq_0 z^0} \sum_{n,m} \mathrm{Tr}\left[\rho e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m(0)}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n(z^0)}\right] e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_m)} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{7.35}$$

を得る．$e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_m)}$ の因子とともに格子点についての和をとると，逆格子ベクトルに対応する移行運動量 (momentum transfer: $\boldsymbol{q}$) の値に鋭いピークが現れる．これらの移行運動量の値において，因子 $e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_m)}$ はすべて 1 となり，干渉による完全な強め合いが起こる．$\mathrm{Tr}\left[\rho e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_m(0)}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}_n(z^0)}\right]$ はピークを鈍らす因子であり，デバイ–ワラー (Debye–Waller) 因子と呼ばれる．この因子は，時間に依存するので，散乱過程におけるフォノン（音子）の吸収・放出についての情報も含む．散乱過程の個々の状況に応じて，(7.35) をさらに簡単に変形することもできる．

つぎに，液体や気体などの別の媒質について考えよう．まず，

$$\Psi_f^*(x)\Psi_i(x) = \langle f|\bar{P}P(x)|i\rangle \tag{7.36}$$

と書けることに注意しよう．これは，Ψ を 1 粒子波動関数として，演算子 P のモード展開を書き出すとわかる．$\bar{P}P$ は核子の密度演算子であり，以下ではこれを $J_0(x)$ と表す.（これは，結局のところ，数密度カレントの時間成分である.）これより，

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{\lambda^2}{V^2} \int d^4x d^4y\; e^{-iq(x-y)} \langle i|J_0(y)|f\rangle\langle f|J_0(x)|i\rangle \tag{7.37}$$

となることがわかる．終状態について和をとると，$\langle i|J_0(y)J_0(x)|i\rangle$ を得るが，

これは次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\langle i|J_0(y)J_0(x)|i\rangle &= \langle i|e^{iPy}J_0(0)e^{-iP(y-x)}J_0(0)e^{-iPx}|i\rangle \\ &= \langle i|J_0(0)e^{iP(x-y)}J_0(0)e^{-ip_i(x-y)}|i\rangle \\ &= \langle i|J_0(0)e^{iP(x-y)}J_0(0)e^{-iP(x-y)}|i\rangle \\ &= \langle i|J_0(0)J_0(x-y)|i\rangle. \end{aligned} \tag{7.38}$$

ただし，エネルギー運動量の演算子 $P=(H,\boldsymbol{P})$ をもちいて，J_0 の座標依存性を変化させた.（この P は，核子の場の演算子とは違うので注意しよう.）p_i は始状態 $|i\rangle$ のエネルギー運動量の固有値である．この結果をもちいて，変数を x, y から $x-y, y$ に変換すると，(7.37) の y 積分を行うことができる．したがって，散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{\lambda^2 m}{k}\mathcal{S}(q)\,\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}, \tag{7.39}$$

$$\mathcal{S}(q) = \int d^4x\ e^{-iqx}\langle i|J_0(0)J_0(x)|i\rangle \tag{7.40}$$

と表せる．ここで，$\mathcal{S}(q)$ は密度演算子の 2 点関数であり，中性子散乱によって，この関数が求められることがわかる.

基本的に弾性散乱である低速中性子の散乱などでは，J_0 を時間に依存しない量としてもよい近似結果が得られる．この場合,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(q) &= 2\pi\delta(k_0-k_0')\mathcal{S}(\boldsymbol{q}), \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{q}) &= \int d^3x\ e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\langle i|J_0(0)J_0(\boldsymbol{x})|i\rangle\end{aligned} \tag{7.41}$$

となる．この $\mathcal{S}(\boldsymbol{q})$ は構造因子と呼ばれる.

7.4 コンプトン散乱

つぎに，スピン $\frac{1}{2}$ の荷電粒子とのコンプトン散乱（例えば，光子と電子あるいは陽電子との散乱）を考えよう．これは，(6.36) で与えられた QED の S 行列によって記述される．S 行列汎関数において，この散乱に関係する項は

$$\mathcal{F} = \exp\left[-\int \frac{\delta}{\delta\psi_r(x)}S_{rs}(x,y)\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_s(y)}\right] e^{ie\int A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

$$= (ie)^2 \int \bar{\psi}(x)\gamma^\mu S(x,y)\gamma^\nu \psi(y) A_\mu(x) A_\nu(y) \tag{7.42}$$

で与えられる[2]．(5.24) の公式（あるいはその一般化）に従って，$\psi, \bar{\psi}$ と A を 1 粒子波動関数で置き換えると，散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{m^2}{EVE'V2\omega V2\omega' V}}\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k')\,\mathcal{M},$$

$$\mathcal{M} = -ie^2 \left[\bar{u}_{\beta p'} \gamma\cdot e^{(\lambda')} \frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m} \gamma\cdot e^{(\lambda)} u_{\alpha p} \right. \tag{7.43}$$
$$\left. + \bar{u}_{\beta p'} \gamma\cdot e^{(\lambda)} \frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m} \gamma\cdot e^{(\lambda')} u_{\alpha p} \right]$$

となる．ここで，入射・散乱電子の運動量を p, p'，対応する光子の運動量を k, k' でそれぞれ表した．スピノールの添え字 α, β は入射・散乱電子のスピンを表し，$e^{(\lambda)}, e^{(\lambda')}$ は対応する光子の偏極を表す．散乱過程の運動学は光子と荷電スカラー粒子の散乱の場合と同様である．入射電子の静止系で考えると，フラックスは $1/V$ なので

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 |\mathcal{M}|^2 d\Omega \tag{7.44}$$

となる．ただし，以前と同様に

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1-\cos\theta)} \tag{7.45}$$

である．ここまではスカラー粒子の場合と同じであるが，もちろん違いは存在し，それは $\mathcal{M}$ に現れる．

散乱断面積 (7.44) は，始状態・終状態の光子と電子に対する偏極が指定されている場合の結果である．入射電子に偏極がなく，散乱電子の偏極は検出されない場合，求めるべき量は，上式で始状態のスピンについて平均をとり，終状態について和をとることによって得られる．その結果は

$$d\sigma = \alpha^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} |\mathcal{N}|^2 d\Omega, \tag{7.46}$$

---

[2] ［訳註］ここでは，結合定数について自明でない最低次のオーダーで与えられている．

$$\mathcal{N} = \bar{u}_{\beta p'} \mathcal{O}_1^{\mu\nu} u_{\alpha p} e_\mu^{(\lambda')} e_\nu^{(\lambda)} + \bar{u}_{\beta p'} \mathcal{O}_2^{\mu\nu} u_{\alpha p} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')},$$
$$\mathcal{O}_1^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p+k) - m} \gamma^\nu,$$
$$\mathcal{O}_2^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p-k') - m} \gamma^\nu$$

と書ける．$\mathcal{N}$ の 2 乗には 4 種類の項が現れる．一般に，$\bar{u}_\beta \mathcal{O} u_\alpha$ のような項の 2 乗は

$$\sum_{\alpha,\beta} \bar{u}_{\beta p'} \mathcal{O} u_{\alpha p} u_{\alpha p}^\dagger \mathcal{O}^\dagger \gamma^0 u_{\beta p'} = \sum_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta p'} \mathcal{O} u_{\alpha p} \bar{u}_{\alpha p} \mathcal{O} u_{\beta p'}$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\mathcal{O} \frac{(m + \gamma \cdot p)}{2m} \mathcal{O} \frac{(m + \gamma \cdot p')}{2m}\right] \quad (7.47)$$

と書ける．ここで，γ 行列の組み合わせについて $\gamma^0 \mathcal{O}^\dagger \gamma^0 = \mathcal{O}$ となることをもちいた．これは γ^i が反エルミートで γ^0 と反交換すること，また γ^0 がエルミートであることからわかる．したがって，

$$\begin{aligned} 4m^2 \sum |\mathcal{N}|^2 = &\mathrm{Tr}\left[e^{(\lambda')} \cdot \mathcal{O}_1 \cdot e^{(\lambda)} (m + \gamma \cdot p) e^{(\lambda)} \cdot \mathcal{O}_1 \cdot e^{(\lambda')} (m + \gamma \cdot p')\right] \\ &+ \mathrm{Tr}\left[e^{(\lambda)} \cdot \mathcal{O}_2 \cdot e^{(\lambda')} (m + \gamma \cdot p) e^{(\lambda')} \cdot \mathcal{O}_2 \cdot e^{(\lambda)} (m + \gamma \cdot p')\right] \\ &+ \mathrm{Tr}\left[e^{(\lambda')} \cdot \mathcal{O}_1 \cdot e^{(\lambda)} (m + \gamma \cdot p) e^{(\lambda')} \cdot \mathcal{O}_2 \cdot e^{(\lambda)} (m + \gamma \cdot p')\right] \\ &+ \mathrm{Tr}\left[e^{(\lambda)} \cdot \mathcal{O}_2 \cdot e^{(\lambda')} (m + \gamma \cdot p) e^{(\lambda)} \cdot \mathcal{O}_1 \cdot e^{(\lambda')} (m + \gamma \cdot p')\right] \end{aligned} \quad (7.48)$$

となる．γ 行列のトレースには次の公式をもちいればよい．

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4\eta^{\mu\nu}, \\ \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] &= 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right), \\ \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}] &= \eta^{\mu_1\mu_2} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}] \\ &\quad - \eta^{\mu_1\mu_3} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}] \\ &\quad + \eta^{\mu_1\mu_4} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_5} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}] - \cdots . \end{aligned} \quad (7.49)$$

これらはクリフォード代数の関係式 $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ から導かれる．最後の式は漸化式であり，γ 行列の数について高次のトレースを低次のトレー

スで表す際にもちいられる．これらの関係式を使うと，少し冗長ではあるが，(7.48) のトレースを計算できる．入射電子の静止系 $p = (m, 0, 0, 0)$ で，その結果は

$$\sum |\mathcal{N}|^2 = \frac{1}{2m^2}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(e^{(\lambda)} \cdot e^{(\lambda')})^2 - 2\right] \tag{7.50}$$

となる．よって，(7.46) の微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(e^{(\lambda)} \cdot e^{(\lambda')})^2 - 2\right] \tag{7.51}$$

となる．これはクライン–仁科公式である．非相対論的極限では（つまり光子エネルギーが小さいとき），$\omega' \approx \omega$ となるので，上式はトムソン断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{m^2}(e^{(\lambda)} \cdot e^{(\lambda')})^2 \tag{7.52}$$

を与える．

(7.51) の式は，電子に偏極がないが，光子に偏極がある場合の散乱断面積である．入射光子に偏極がなく，放射光子のすべての偏極が検出される場合，散乱断面積は入射光子の偏極について平均をとり，放射光子の偏極について和をとることで得られる．(7.13) をもちいると，

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sum(e^{(\lambda)} \cdot e^{(\lambda')})^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta), \\ \frac{1}{2}\sum\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2\right] = 2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2\right]\end{gathered} \tag{7.53}$$

となる．これを (7.51) に代入すると，偏極がない場合の断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right] \tag{7.54}$$

となる．

散乱角で積分すると全断面積が得られる．非相対論的極限で，これはトムソン散乱の全断面積

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2} \tag{7.55}$$

を与える．より一般には，

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th}\,F(\omega/m) \tag{7.56}$$

となる．ただし，

$$F(\omega/m) \to \begin{cases} 1 & \left(\dfrac{\omega}{m} \to 0\right) \\ \dfrac{3m}{8\omega}\left[\log(2\omega/m) + \dfrac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{\log(\omega/m)}{(\omega/m)}\right)\right] & \left(\dfrac{\omega}{m} \to \infty\right) \end{cases} \tag{7.57}$$

である．

光子のエネルギーが小さいときに散乱断面積がトムソン断面積と一致するという結果は，スカラー粒子の場合と同じである．これまでの計算は結合定数 e について自明でない最低次のオーダーをとり，またスピンが 0 と $\frac{1}{2}$ の場合だけに限られてきたが，このトムソン断面積についての結果はより一般に成り立つ．実際，電磁相互作用のゲージ不変性から，次の低エネルギー定理を示すことができる．すなわち，コンプトン散乱の厳密な断面積は光子エネルギー ω がゼロとなる極限でトムソン断面積に一致する．粒子の電荷が Q のとき，断面積公式の α は当然ながら $(Q^2/4\pi)$ に置き換えられる．この定理はきわめて一般的であり，繰り込みの効果やハドロン中間状態の寄与などを含めても成り立つ．よって，これをもちいて粒子の電荷を定義することも可能である．つまり，ある粒子の電荷 Q は公式

$$\left(\frac{Q^2}{4\pi}\right)^2 = \frac{3}{8\pi}m^2\sigma(\omega)\bigg]_{\omega\to 0} \tag{7.58}$$

で定義されると言うこともできる．ここで，$\sigma(\omega)$ はコンプトン散乱の断面積である．(これに関連した低エネルギー定理については，11 章を参照されたい．)

7.5　π^0 中間子の崩壊

π^0 中間子（中性パイオン）はクォークと反クォークでできた中性粒子であり，これは 2 光子へ崩壊する．この崩壊過程を記述する相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\alpha}{\pi f}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\phi \tag{7.59}$$

と表せる．ϕ はパイオンの場である．α は微細構造定数である．また，$f =$

$f_\pi \approx 93\,\mathrm{MeV}$ はパイオンの崩壊定数であり，これは荷電パイオンの弱い相互作用に関する（レプトニックな）崩壊過程で観測される．相互作用 (7.59) の形は，後で量子異常を議論する際に導かれる．

入射パイオンの運動量を p とし，放射光子の運動量を k_1, k_2，その偏極を $e^{(\lambda)}, e^{(\lambda')}$ としよう．確率振幅は，$e^{iS_{int}}$ において場を 1 粒子の波動関数で置き換えることで求められるので，

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k_1-k_2)}{\sqrt{2p_0V2\omega_1V2\omega_2V}}\,\mathcal{M},\\ \mathcal{M} &= \frac{i\alpha}{\pi f}\epsilon_{ijr}(k_{1i}\omega_2-k_{2i}\omega_1)e_j^{(\lambda)}e_r^{(\lambda')}\end{aligned} \tag{7.60}$$

となる．δ 関数の 2 乗を δ 関数と $V\tau$ の積で置き換えられることをもちいると，単位時間当たりの崩壊確率は $|\mathcal{A}|^2/\tau$ で与えられる．光子は同種ボース粒子なので光子 2 つで表される終状態は余分に 2 倍されている．これは状態 $((k_1,e),(k_2,e'))$ と状態 $((k_2,e'),(k_1,e))$ が識別不可能であることからわかる．終状態について和をとる際に，もし運動量と偏極に関して何ら特別な選択条件がなければ，同じ状態について 2 度数えることになる．この重複は 2 で割ることで相殺できるので，全崩壊確率は

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma} &= \int \frac{1}{2}\sum_{\text{終状態}}\frac{|\mathcal{A}|^2}{\tau}\\ &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k_1-k_2)}{16p_0\omega_1\omega_2}\sum_{\lambda,\lambda'}|\mathcal{M}|^2\end{aligned} \tag{7.61}$$

となる．δ 関数のため，k_2 積分は簡単に実行でき，$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}_1$ となる．以下では，パイオンの静止系 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$, $p_0 = m_\pi$ で計算しよう．このとき，$\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2$, $\omega\equiv\omega_1=\omega_2$ となる．また，

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda,\lambda'}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{4\alpha^2}{\pi^2f^2}\sum\left[\omega\epsilon_{ijr}k_ie'_je_r\right]^2\\ &= \frac{8\alpha^2\omega^4}{\pi^2f^2}\end{aligned} \tag{7.62}$$

であるので，崩壊確率は

$$\mathit{\Gamma} = \int\frac{8\alpha^2\omega^4}{\pi^2f^2}\frac{2\pi\delta(m_\pi-2\omega)}{16m_\pi\omega^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f^2} \tag{7.63}$$

で与えられる．これはおよそ 7.63 eV であり，実験値 (7.37 ± 1.5) eV と比較すると，パイオンの複合粒子としての特性を無視するなどの仮定をしたわりには，悪い値ではないことがわかる．

7.6　チェレンコフ放射

ここで考える基本的な散乱過程は，荷電粒子による光子の放射に関するものである．このような過程は，真空では運動学的に禁止されているが，媒質中では粒子の速度が光速を上回ることがあるので可能となる．誘電率は本来，光子と荷電粒子の媒質中での相互作用に起因するのであるが，チェレンコフ放射を議論するに当たり，ここでは媒質の誘電率が有効的に $\epsilon(\omega)$ と表せるとしよう．このとき，自由光子は $\boldsymbol{k}^2 = \epsilon(\omega)\omega^2$ をみたす．粒子の入射・放射運動量を p, p' とし，放射される光子の運動量を k とする．エネルギー運動量保存則により

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k}, \\ E &= E' + \omega \end{aligned} \tag{7.64}$$

となる．この 2 番目の式を 2 乗し，1 番目の式をもちいると，

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{E\omega}{pk} + \frac{(\epsilon - 1)\omega^2}{2pk} \\ &= \frac{1}{v\sqrt{\epsilon}} + \frac{(\epsilon - 1)\omega^2}{2pk} \end{aligned} \tag{7.65}$$

を得る．ここで，θ は $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k} = pk\cos\theta$ で定義され，$v = p/E$ は粒子の速度である．$\epsilon \to 1$ の極限で右辺は 1 よりも大きくなるので，θ の解は存在せず，光子の放射は運動学的に禁じられる．媒質中では，放射される光は角度 (7.65) をもつ円錐を成す．$\epsilon \approx 1$ のとき，この角度は

$$\cos\theta = \frac{1}{v\sqrt{\epsilon}} \tag{7.66}$$

と近似できる．もちろん，これが解をもつには $v\sqrt{\epsilon} > 1$ が必要となる．(実際，(7.65) の第 2 項は量子効果であるので古典的には (7.66) のみが現れる.)

つぎに，散乱の動力学を見てみよう．光子のラグランジアンは，$A_0 = 0$ のもとで，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\epsilon\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 - \boldsymbol{B}^2\right] \tag{7.67}$$

の形で表せる．正準運動量は $\Pi_i = \epsilon \dot{A}_i$ である．ここで，A_i のモード展開は

$$\begin{aligned} A_i^T(x) &= \sum_{k\lambda} a_{k\lambda} e_i^{(\lambda)} u_k(x) + a_{k\lambda}^\dagger e_i^{(\lambda)} u_k^*(x), \\ u_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\epsilon\,\omega_k V}} e^{-ikx} \end{aligned} \tag{7.68}$$

となる．$a, a^\dagger$ は通常の交換関係をみたす．$u_k(x)$ の分母にある因子 $\sqrt{\epsilon}$ は，Π, A が標準的な交換関係をもつために必要である．このとき，ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \; \frac{1}{2}\left[\frac{\Pi^2}{\epsilon} + B^2\right] \\ &= \sum_k \omega a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} \end{aligned} \tag{7.69}$$

となる．

荷電粒子をスカラー粒子とすると，光子放射の相互作用は

$$\mathcal{L}_{int} = -ie\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu + \cdots \tag{7.70}$$

となる．したがって，光子放射の確率振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= ie \int d^4x \; (p+p')^\mu e_\mu^{(\lambda)} \frac{e^{-ipx+ip'x+ikx}}{\sqrt{2\epsilon\omega V 2EV 2E'V}} \\ &= -ie \frac{2p \cdot e^{(\lambda)}}{\sqrt{2\epsilon\omega V 2EV 2E'V}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p'-k) \end{aligned} \tag{7.71}$$

で与えられる．ここで，$k \cdot e = 0$ なので $p' \cdot e = (p+k) \cdot e = p \cdot e$ と書けることをもちいた．光子の放射率は

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{\tau} = \frac{e^2}{2V^2} \frac{(p \cdot e)^2}{\epsilon\omega E E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p'-k) \tag{7.72}$$

で与えられる．光子 1 つ当たりの放射によるエネルギー損失は ω なので，エネルギー損失率は上式を ω 倍すれば求まる．終状態について和をとると，

$$\frac{dE}{dt} = \sum_\lambda \omega \frac{e^2}{2} \frac{(p \cdot e)^2}{\epsilon \omega E E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}$$
$$= \alpha \frac{p^2}{E E' \epsilon} (1 - \cos^2\theta) \delta(E - \sqrt{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 + m^2} - \omega) k^2 dk d(\cos\theta) \tag{7.73}$$

となることがわかる．ここで，$\boldsymbol{p}'$ についての積分を行った．また，関係式

$$\sum_\lambda p \cdot e\, p \cdot e = \boldsymbol{p}^2 - \frac{(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{k}^2}$$
$$= p^2 (1 - \cos^2\theta) \tag{7.74}$$

をもちいた．角度についての積分を行うと，θ は (7.65) で与えられる値に決まる．よって，残りの k 積分は

$$\frac{dE}{dt} = \alpha \int \frac{p}{E} \frac{k dk}{\epsilon} (1 - \cos^2\theta) \tag{7.75}$$

と表される．ここで，$\partial\epsilon/\partial\omega$ を無視すると，

$$1 - \cos^2\theta \approx \left(1 - \frac{1}{v^2 \epsilon}\right),$$
$$k dk \approx \epsilon \omega d\omega \tag{7.76}$$

と近似できる．最終的な結果は，経路の単位長さ当たりのエネルギー損失として表されることが多い．これは，$dx = v dt$ をもちいて表すことができる．以上の結果をまとめると，

$$\frac{dE}{dx} = \alpha \int d\omega\, \omega \left(1 - \frac{1}{v^2 \epsilon}\right) \tag{7.77}$$

となる．これはチェレンコフ放射のエネルギー損失に関するフランク–タム (Frank–Tamm) 公式である．

7.7 ρ 中間子の崩壊

中性 ρ 中間子の荷電レプトンへの崩壊過程は，ρ と光子の混合を含むラグランジアンによって記述される．ρ_μ, e^+, e^- および光子によるそのようなラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int},\\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\rho_\nu\partial^\mu\rho^\nu + \frac{1}{2}M^2\rho^2\\ &\qquad + \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi,\\ \mathcal{L}_{int} &= \frac{e}{g}M^2\rho\cdot A + e\bar{\psi}\gamma\cdot A\psi\end{aligned} \tag{7.78}$$

で与えられる．ただし，$\partial\cdot\rho = 0$ である．ρ–A 項は ρ と光子の混合を表すが，これは ρ 中間子の相互作用がいわゆるベクトル優位であることと矛盾しない．また，定数 g は $g\approx 5$ となる数値である．ρ 中間子の崩壊には多くのチャンネルが存在する．ρ 中間子の e^+e^- 対(つい)への崩壊モードは上のラグランジアンで記述される．よって，このモードの部分崩壊確率はラグランジアン (7.78) をもちいて計算できる．

運動量 p，偏極 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ の ρ が運動量 k, k' の e^+e^- 対へ崩壊する確率振幅は，結合定数 e の最低次のオーダーで，

$$\mathcal{A} = \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+k'-p)}{\sqrt{2\omega_p V E_k V E_{k'} V}}\, i\frac{e^2}{g}M^2 m\,\epsilon_\mu^{(\lambda)}\,\frac{(\bar{u}_{\alpha k}\gamma^\mu u_{\beta k'})}{p^2} \tag{7.79}$$

となる．$1/p^2$ の因子は光子の伝播関数によるもので，これは $e^{iS_{int}}$ の展開式に A のウィック縮約を施すことで得られる．この計算では p^2 は M^2 に等しい．以下では，ρ 中間子に偏極のない場合について崩壊確率を計算しよう．つまり，3 つの偏極状態について平均をとるのであるが，それは

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{*(\lambda)} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{7.80}$$

をもちいて計算できる．終状態の運動量を微小範囲にとり，また放射電子のスピンについて和をとると偏極のない ρ 中間子の崩壊確率は

$$\Gamma = \frac{e^4}{g^2}m^2\int\frac{1}{3}\sum_\lambda\sum_{\alpha,\beta}|\bar{u}_k\gamma\cdot\epsilon^{(\lambda)}u'_{k'}|^2\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+k'-p)}{2\omega_p E_k E_{k'}}\frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \tag{7.81}$$

で与えられる．偏極についての和公式 (7.80) をもちいると

$$\sum_\lambda\sum_{\alpha,\beta}|\bar{u}_k\gamma\cdot\epsilon^{(\lambda)}u'_{k'}|^2 = 6 + \frac{4\boldsymbol{k}^2}{m^2} \tag{7.82}$$

となる．ρ 中間子の静止系では，$p = (M,0,0,0)$, $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$, $E_{k'} = E_k$ とな

る．このとき，全崩壊確率は

$$\Gamma = \frac{e^4 m^2}{8\pi^2 g^2}\frac{1}{3}\int d^3k\left(6+\frac{4\boldsymbol{k}^2}{m^2}\right)\frac{\delta(2E_k - M)}{ME_k^2}$$
$$= \frac{4\pi\alpha^2}{3g^2}M\left(1+\frac{2m^2}{M^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{M^2}} \tag{7.83}$$

で与えられる．ここで，$\alpha = e^2/4\pi$ である．電子の質量は ρ の質量に比べて小さいので，上式は

$$\Gamma \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3}\frac{M}{g^2} \tag{7.84}$$

と近似できる．

参考文献

1. スカラー粒子および電子のコンプトン散乱は多くの教科書で取り上げられている標準的な計算例である．これはモット散乱についても同様である．QED における多くの散乱過程を扱った良書として，J.M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag (1955 & 1976) がある．

2. 中性子散乱とチェレンコフ放射については，場の理論によって通常別の方法で計算される過程がいかに見通しよく記述されるかを示すために取り上げた．結晶中での散乱については J. Callaway, *Quantum Theory of the Solid State*, Academic Press (1974) を参照されたい．中性子散乱で測定できる構造因子は物性物理（例えばファインマンの液体ヘリウムの理論）で有用な因子である．液体ヘリウム理論については R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co. (1972) を参照されたい．

3. チェレンコフ放射のフランクとタムによる結果は J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Wiley Text Books (1998) のなかで古典的に導出されている．

4. 中性パイオンの崩壊については，現象論的なラグランジアンをもちいた計算法の紹介を兼ねて取り上げた．原論文は J. Steinberger, Phys. Rev. **82**, 664 (1949) である．パイオン崩壊の理解，特にその南部–ゴールドストン・ボソンとしての役割，は量子異常を通して行うことができる．この量子異常の計算については S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969); J. Bell and R. Jackiw, Nuov. Cim. **60A**, 47 (1969) を参照されたい．この対称性の観点から本章の有効ラグランジアンを導くことができる．

5. ρ 中間子の崩壊で支配的なモードは π 中間子 2 つへの崩壊であり，本章で議論したものとは異なる．ここでは現象論的なラグランジアンによる別の計算例としてこの崩壊過程を取り上げた．ρ-γ 混合や中間子相互作用のベクトル優位性については J.J. Sakurai, *Currents and Mesons*, University of Chicago Press

(1969) を参照されたい.

第 8 章

汎関数積分表示

8.1　ボソン場の汎関数積分

汎関数微分の概念については以前に議論した．ここでは，汎関数積分の概念について考えよう．2 章で，関数空間 $\mathcal{F}$ を定義した．積分を議論するには，この関数空間 $\mathcal{F}$ 上の体積測度が必要となる．これは，$\mathcal{F}$ 上の距離関数すなわち計量を特定することで求められる．実スカラー場 $\varphi(x)$ に対して，$\varphi(x)$ と $\varphi(x)+\delta\varphi(x)$ の配位間の距離は

$$ds^2 = \|\delta\varphi\|^2 = \int_{\Sigma} d^4x\,(\delta\varphi)^2 \tag{8.1}$$

ととれる．$\varphi(x)$ を実正規直交基底で展開すると，$\varphi(x) = \sum_n c_n u_n(x)$ となる．ここで，係数 c_n は実数であり，

$$ds^2 = \|\delta\varphi\|^2 = \sum_n (\delta c_n)^2 \tag{8.2}$$

を得る．(8.1) で定義された距離はユークリッド型である．実スカラー関数についてはこれでよい．ただ，一般に，計量は φ の性質に依存する．例えば，時空間領域 Σ から 2 次元球面 S^2 への写像を考えよう．S^2 の座標として (θ,α) をもちいると，写像は $\theta(x)$, $\alpha(x)$ で与えられる．（ただし，α は方位角を表す.）このとき，対応する関数空間において計量は

$$ds^2 = \int_{\Sigma} d^4x\ \left[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta\,(\delta\alpha)^2\right] \tag{8.3}$$

の形で表せる．

関数 1 つ 1 つに対して c_n が選ばれ，また各関数は $\mathcal{F}$ の点に対応するので，c_n は $\mathcal{F}$ 上の局所座標とみなせる．局所座標 c_n と計量テンソル g_{nm} が決まれば，体積要素は

$$[d\varphi] = dV = \sqrt{\det g}\, dc_1 dc_2 \cdots \tag{8.4}$$

で与えられる．一般に，c_n の数は無限にあるので，ある上限を指定して体積測度を決めなければならない．すなわち，モード数を N，対応する g_{nm} を $(N \times N)$ の行列として

$$dV^{(N)} = \sqrt{\det g^{(N)}}\, dc_1 dc_2 \cdots dc_N \tag{8.5}$$

を定義し，

$$dV = \lim_{N\to\infty} dV^{(N)} \tag{8.6}$$

の極限をとることを考えればよい．有限モードで表される計量は正則化された計量と呼ばれる．一般に，関数空間のすべての計量は適当な正則化のもとで定義されなければならない．

ここで興味のある積分はガウス型の汎関数積分なので，次の積分

$$I = \int [d\varphi] \exp\left[-\frac{1}{2}\int_\Sigma d^4x d^4y\ \varphi(x)M(x,y)\varphi(y)\right] \tag{8.7}$$

を計算しよう．以前と同様に，正規直交基底 $\varphi(x) = \sum_n c_n u_n(x)$ でモード展開すると，上式の括弧のなかは

$$\int_\Sigma d^4x d^4y\ \varphi(x)M(x,y)\varphi(y) = \sum_{n,m} c_n M_{nm} c_m \tag{8.8}$$

となる．ただし，

$$M_{nm} = \int_\Sigma d^4x d^4y\ u_n(x)M(x,y)u_m(y) \tag{8.9}$$

である．ここでは，M_{nm} が対角化可能で，かつその固有値が正の実部をもつ場合に興味がある．よって，M を対角化する正規直交基底を選ぶことができる．つまり，次式で定義される $M(x,y)$ の固有関数 $f_n(x)$ を考えることができる．

$$\int_\Sigma d^4y\, M(x,y)f_n(y) = \lambda_n f_n(x). \tag{8.10}$$

$\varphi(x)$ を $\varphi(x) = \sum_n a_n f_n(x)$ と展開すると，$\|\delta\varphi\|^2 = \sum_n (\delta a_n)^2$，$dV = \prod da_n$ となるので，

$$\begin{aligned} I &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_1^N [da_n] \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^N a_n^2 \lambda_n\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_1^N \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} \\ &= \left[\det\left(\frac{M}{2\pi}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{8.11}$$

を得る．ただし，行列式は $\det M^{(N)}$ を評価したのちに $N \to \infty$ の極限をとって定義されなければならない．このように，モード数 N を有限にとり，最終的に $N \to \infty$ の極限をとることで，汎関数行列式および一般の汎関数積分を定義する手法を正則化と呼ぶ．行列式に関する結果は基底によらないので，必ずしも対角化された基底 $\{f_n(x)\}$ を選ばなくてもよいことは明らかである．

つぎに，積分

$$I[J] = \int [d\varphi] \exp\left[-\frac{1}{2}\int_\Sigma d^4x d^4y\ \varphi(x) M(x,y) \varphi(y) + \int_\Sigma d^4x\ J(x)\varphi(x)\right] \tag{8.12}$$

について考えよう．これもガウス型の積分であり，括弧の中を完全平方の形にすると，次のように計算できる．

$$\begin{aligned} I[J] &= \int [d\varphi] e^{-\frac{1}{2}\int \varphi M \varphi + \int J\varphi} \\ &= \int [d\varphi] e^{-\frac{1}{2}\int (\varphi - JM^{-1}) M (\varphi - M^{-1}J)} e^{\frac{1}{2}\int JM^{-1}J} \\ &= \int [d\varphi] e^{-\frac{1}{2}\int \varphi M \varphi} e^{\frac{1}{2}\int JM^{-1}J} \\ &= \left[\det\left(\frac{M}{2\pi}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\int_\Sigma d^4x d^4y\, J(x) M^{-1}(x,y) J(y)\right]. \end{aligned} \tag{8.13}$$

ただし，φ から $(\varphi - M^{-1}J)$ への変数変換のもとで測度が不変であることをもちいた．

ここまで，実関数について考えてきた．複素スカラー関数 $\varphi(x)$ の場合は，

$\varphi(x) = (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x))/\sqrt{2}$ と表せる．ただし，φ_1, φ_2 は実関数である．よって，上の結果から

$$I[J,\bar{J}] = \int [d\varphi d\bar{\varphi}] e^{-\int \bar{\varphi} M \varphi + \int \bar{J}\varphi + \bar{\varphi} J}$$
$$= \left[\det\left(\frac{M}{2\pi}\right)\right]^{-1} e^{\int \bar{J} M^{-1} J} \tag{8.14}$$

となることがわかる．スカラー場が 2 つあるので，$[\det(M/2\pi)]^{-\frac{1}{2}}$ の 2 乗が現れることに注意しよう．

8.2　汎関数積分としてのグリーン関数

積分 (8.13) を使うと，スカラー場の N 点関数に対する生成汎関数 $Z[J]$ を汎関数積分表示で求めることができる．自由スカラー場 φ の作用は

$$\mathcal{S}_0 = \int d^4x\ \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi\partial\varphi) - m^2\varphi^2\right]$$
$$= -\int d^4x\ \frac{1}{2}\varphi(x)(\Box + m^2)\varphi(x) \tag{8.15}$$

と書ける．ここで，$\exp(i\mathcal{S}_0)$ のすべての場についての積分を考える必要がある．ただし，$\mathcal{S}_0$ は実数なので，そのような被積分項は振動項となる．そこで，$\exp(i\mathcal{S}_0 - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2)$ の積分を考えよう．ϵ は微小な正の実数であり，場の値が大きいときに積分が収束するように導入されたパラメータである．最終的には，これはゼロとなる．ここで，

$$\begin{aligned} i\mathcal{S}_0 - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2 &= -\frac{1}{2}\int \varphi(x)M(x,y)\varphi(y), \\ M(x,y) &= i(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\,\delta^{(4)}(x-y) \end{aligned} \tag{8.16}$$

である．$G(x,y)$ をファインマンの伝播関数とすると，

$$\int d^4z\ M(x,z)G(z,y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{8.17}$$

となる．これは $G(x,y)$ が $M(x,y)$ の逆元であることを示している．よって，(8.13) を直接適用すると

$$\int [d\varphi] \exp\left[i\mathcal{S}_0 - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2 + \int J\varphi\right] =$$

$$C\,\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\,J(x)G(x,y)J(y)\right] \tag{8.18}$$

を得る．ただし，C は (8.13) の行列式を表す．これは J によらない．この定数を除けば，上式の右辺は自由スカラー場の生成汎関数 $Z_0[J]$ に他ならない．言い換えると，

$$Z_0[J]=C^{-1}\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}_0-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right] \tag{8.19}$$

が示された．ここで，ϵ の項は場の値が大きいときの汎関数積分の収束性から導かれたが，この項は同時に，グリーン関数の決定に際してファインマンの積分経路を選択することを意味し，その結果，伝播関数は公式 (8.18) の形で表される．ファインマンの積分経路が選ばれていることは，伝播関数の被積分関数がユークリッド空間に接続されるのにとても重要である．同様に，汎関数微分をユークリッド化された作用で定義し，ミンコフスキー空間への接続を考えると，収束因子 $i\epsilon$ が自然に現れる．これら 2 つの場合に $i\epsilon$ が現れるという事実は明らかに相互関連している．

つぎに，相互作用のある場の理論を考えよう．φ^4 相互作用の場合，5 章で示したように，その生成汎関数 $Z[J]$ は

$$Z[J]=\mathcal{N}\exp\left[-i\lambda\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]Z_0[J] \tag{8.20}$$

で与えられる．$Z_0[J]$ として (8.19) をもちいると，

$$\begin{aligned}Z[J]&=\mathcal{N}'\exp\left[-i\lambda\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}_0-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right]\\&=\mathcal{N}'\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}_0-i\lambda\int\varphi^4-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right]\\&=\mathcal{N}'\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right]\end{aligned} \tag{8.21}$$

となることがわかる．ここで，

$$\mathcal{S}=\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi\partial\varphi)-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\lambda\varphi^4\right] \tag{8.22}$$

は相互作用のある理論の古典的な作用である．定数 $\mathcal{N}'$ は，$Z[0]=1$ を要請

して決めることができる.

(8.21) の結果は，任意の多項式型の相互作用に一般化することができる．これは次のように表せる.

$$Z[J] = \mathcal{N}\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S} - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2 + \int J\varphi\right]. \tag{8.23}$$

ただし，$\mathcal{S}$ は相互作用理論の古典的な作用であり，規格化因子は

$$\mathcal{N}^{-1} = \int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S} - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2\right] \tag{8.24}$$

となる.

この結果は次のように直接導出することもできる．5 章でみたように，φ^4 理論の演算子の運動方程式は

$$(\Box_x + m^2)\phi(x) + 4\lambda\phi^3(x) = 0 \tag{8.25}$$

で与えられる．同時刻の正準交換関係は

$$\begin{aligned}
\left[\phi(x^0,\boldsymbol{x}),\phi(x^0,\boldsymbol{y})\right] &= 0,\\
\left[\pi(x^0,\boldsymbol{x}),\phi(x^0,\boldsymbol{y})\right] &= -i\,\delta^{(3)}(x-y),\\
\left[\pi(x^0,\boldsymbol{x}),\pi(x^0,\boldsymbol{y})\right] &= 0
\end{aligned} \tag{8.26}$$

である．ただし，$\pi(x^0,\boldsymbol{x}) = \partial_0\phi(x^0,\boldsymbol{x})$ である．5 章では，これらの関係式から，$Z[J]$ のみたす方程式

$$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} + 4\lambda\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 Z[J] = -iJ(x)Z[J] \tag{8.27}$$

を導いた．上式を解くに当たり，以前は，相互作用項を分離した後に，自由場をもちいて (8.20) を求めたが，ここでは，汎関数積分の枠組みで上式がどのように現れるかを示そう．まず，次の恒等式に注目しよう.

$$\int[d\varphi]\,\frac{\delta}{\delta\varphi}\left[\exp\left[i\mathcal{S} - \frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2 + \int J\varphi\right]\right] = 0. \tag{8.28}$$

この被積分関数は全微分項なので積分を実行することができ，その結果は被積分関数の φ 空間での境界値つまり $|\varphi|$ の大きな値をもちいて表すことができる．$\exp(-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2)$ 項により $|\varphi|$ が大きいとき，被積分関数はゼロになり，

(8.28) が成り立つ．この式の微分を書き下し，関係式

$$F\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right]$$
$$=\int[d\varphi]F(\varphi)\exp\left[i\mathcal{S}-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right] \tag{8.29}$$

をもちいると，

$$\left[(\Box_x+m^2-i\epsilon)\frac{\delta}{\delta J(x)}+4\lambda\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3+iJ(x)\right]$$
$$\times\int[d\varphi]\exp\left[i\mathcal{S}-\frac{1}{2}\epsilon\int\varphi^2+\int J\varphi\right]=0 \tag{8.30}$$

を得る．これを (8.27) と比べると，(8.23) の汎関数積分が (8.27) の解 $Z[J]$ を与えることがわかる．

式 (8.23), (8.24) は注目すべき結果である．これらをもちいると，量子論のさまざまな演算子形式を使うことなく，古典論の作用から N 点関数の生成汎関数および S 行列を直接導くことができる．このとき，すべての操作は「古典的」である．つまり，積分だけが関与する．次章でみるように，実際にはそれほど簡単な話ではない．というのも，結合パラメータに対する繰り込みの要請により，実際の計算では，少し違った形の（あるいは変形された）古典的な作用が必要となるからである．しかし，この補正もどちらかといえばマイナーなものであり，式 (8.23), (8.24) は，古典論の作用から N 点関数や S 行列といった量子論の結果を直接導く処方を与える．

8.3 フェルミ粒子の汎関数積分

つぎに，フェルミ粒子に適した汎関数積分表示について議論しよう．この汎関数積分表示は，予想されるとおり，反交換関係をみたす c 数つまりグラスマン変数の積分で与えられる．

ここでは，グラスマン数の積分を定義することから始めよう．まず 1 変数 η の場合を考えると，η の任意の関数は $f_0(x)+f_1(x)\eta$ の形になるので，$\int d\eta$ と $\int d\eta\,\eta$ だけを定義すればよい．以下では，積分を形式的に定義するが，この定義は η の全範囲にわたる積分がみたすべき振る舞いと整合的でなければ

ならない．$\int d\eta\, \eta$ を考えよう．これは，形式的にはすべての η にわたる積分とみなせるので，η の並進変換のもとで不変でなければならない．したがって，

$$\int d\eta\ (\eta + \alpha) = \int d\eta\ \eta \tag{8.31}$$

が要請される．ただし，α は任意のグラスマン数である．上式は，$\int d\eta = 0$ を意味する．一方，$\int d\eta\, \eta$ はゼロである必要はない．そこで，これを 1 と定義しよう．よって，グラスマン積分の規則は

$$\int d\eta = 0\,, \qquad \int d\eta\ \eta = 1 \tag{8.32}$$

となる．より一般的に，N 個のグラスマン数 η_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ があるとき，上の結果を繰り返しもちいると，被積分関数がすべての η_i の積である場合を除いて，積分はゼロになることがわかる．ゼロでない唯一の積分は

$$\int d\eta_N d\eta_{N-1} \cdots d\eta_1\ \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_N = 1 \tag{8.33}$$

である．η_i の順序が変わると，η_i の反交換関係から，

$$\int [d\eta]\ \eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_N} = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N} \tag{8.34}$$

となる．ただし，$[d\eta] = d\eta_N d\eta_{N-1} \cdots d\eta_1$ である．

場の理論の計算において興味のある積分は，ガウス型の積分である．互いに反交換関係にある N 個の変数 η_i と N 個の変数 $\bar{\eta}_i$ を考えよう．($\bar{\eta}_i$ は η_i と独立なグラスマン数であり，η_i の「共役」ではないことに注意しよう.）ここで，積分

$$I = \int [d\eta d\bar{\eta}]\ \exp\left(- \sum_i \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j \right) \tag{8.35}$$

を考える．この積分に寄与する唯一の項は，(8.33) より，N 個の η と N 個の $\bar{\eta}$ を含む項でなければならない．括弧のなかを展開し，(8.34) をもちいると，

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{\frac{1}{2}N(N+1)} \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_N} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \cdots M_{i_N j_N} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}N(N+1)} (\det M) \end{aligned} \tag{8.36}$$

を得る．この結果を関数の場合に一般化すると

$$I = \int [d\eta d\bar{\eta}] \exp\left(- \int_{x,y} \bar{\eta}(x) M(x,y) \eta(y) \right)$$
$$= (\det M) \tag{8.37}$$

となる．ここで全体にかかる符号は，以下の議論に関係ないので無視した．ボース粒子の場合と同じように，行列式は正則化の手法をもちいて評価されなければならない．つまり，有限のモード数で計算し，その後にモード数が無限の極限を適切にとる必要がある．

最後に，グラスマン数の値をとる関数 $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ と $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ による積分

$$\begin{aligned}
I[\eta, \bar{\eta}] \\
&= \int [d\psi d\bar{\psi}] \exp\left(- \int_{x,y} \bar{\psi}(x) M(x,y) \psi(y) + \int_x (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)) \right) \\
&= \int [d\psi d\bar{\psi}] \exp\left(- \int (\bar{\psi} - \bar{\eta} M^{-1}) M (\psi - M^{-1}\eta) \right) \exp\left(\int \bar{\eta} M^{-1} \eta \right) \\
&= (\det M) \exp\left(\int \bar{\eta} M^{-1} \eta \right)
\end{aligned} \tag{8.38}$$

を考えよう．

これらの結果はフェルミオン場に応用できる．多粒子系のフェルミオン伝播関数は生成汎関数

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \langle 0 | T \exp\left(\int \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) | 0 \rangle \tag{8.39}$$

をもちいて議論された．ソース（源）$\eta, \bar{\eta}$ はグラスマン数の値をもつスピノールであり，これらは $\psi, \bar{\psi}$ とも反交換関係にある．$Z[\eta, \bar{\eta}]$ の形は 4 章で

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp\left[\int d^4x d^4y \ \bar{\eta}(x) S(x,y) \eta(y) \right] \tag{8.40}$$

と与えられた．ただし，$Z[0,0] = 1$ として規格化した．

つぎに，積分 (8.38) を適用すると，$Z[\eta, \bar{\eta}]$ の汎関数積分表示を求めることができる．$M(x,y) = (-i)(i\gamma \cdot \partial_x - m)\delta^{(4)}(x-y)$ とすると，(8.38) の積分から

$$I[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\psi d\bar{\psi}] \exp\left(- \int_{x,y} \bar{\psi}(x) M(x,y) \psi(y) \right.$$

$$
+ \int_x (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))\Big)
$$

$$
= (\det M) Z[\eta, \bar{\eta}] \tag{8.41}
$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
-\int_{x,y} \bar{\psi}(x) M(x,y) \psi(y) &= i \int d^4x \ \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi \\
&= i\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}]
\end{aligned} \tag{8.42}
$$

と書けることに注意しよう．ただし，$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}]$ はディラック理論の作用である．よって，$Z[\eta, \bar{\eta}]$ の汎関数積分公式は

$$
Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int [d\psi d\bar{\psi}] \ \exp\left[i\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}] + \int d^4x \, (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)) \right] \tag{8.43}
$$

となる[1]．

この結果は相互作用をもつフェルミオン理論へも一般化されることは明らかであろう．フェルミオンとボソンの場が共存する場合の N 点関数の生成汎関数は

$$
\begin{aligned}
Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int [d\varphi d\psi d\bar{\psi}] \ \exp\Bigg[& i\mathcal{S}[\varphi, \psi, \bar{\psi}] \\
& + \int d^4x \, (J(x)\varphi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)) \Bigg]
\end{aligned} \tag{8.44}
$$

と書ける．ここで，フェルミオンの変数はグラスマン数であり，ボソン場は通常の実数あるいは複素数の関数である．規格化因子 $\mathcal{N}$ は $Z[0,0,0] = 1$ の要請により固定される．したがって，場の古典的な作用が決まると，演算子による導出過程を経ずに，上式から N 点関数の生成汎関数を直接導くことができる．ある意味では，この式は場の量子論を定義する式であるとみなせる．

8.4 S 行列汎関数

$Z[J]$ の汎関数積分表示を得たので，S 行列についても同様に表すことがで

---

[1] ［訳註］規格化因子 $\mathcal{N}$ は $Z[0,0] = 1$ によって決まる．

きるのは明らかであろう．5 章でみたように，スカラー場理論の S 行列汎関数の公式は

$$\mathcal{F}[\varphi] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int \varphi(\Box + m^2)\varphi\right] Z[i(\Box + m^2)\varphi] \tag{8.45}$$

となる．そこで，$Z[J]$ の汎関数積分 (8.23) をもちいて上式を変形しよう．まず，作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\chi) &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}m^2\chi^2\right] + \mathcal{S}_{int}(\chi) \\ &= \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{int}\end{aligned} \tag{8.46}$$

と分離できるので，$\mathcal{S}(\chi) + \int i\chi(\Box + m^2)\varphi$ の完全平方を考えると

$$\begin{aligned}Z[i(\Box + m^2)\varphi] &= \mathcal{N}\int[d\chi]\exp\Big[i\mathcal{S}_0(\chi - \varphi) - \frac{1}{2}\epsilon\int\chi^2 \\ &\qquad\qquad + i\mathcal{S}_{int}(\chi) + \frac{i}{2}\int\varphi(\Box + m^2)\varphi\Big] \\ &= \mathcal{N}\int[d\chi]\exp\Big[i\mathcal{S}_0(\chi) - \frac{1}{2}\epsilon\int\chi^2 + i\mathcal{S}_{int}(\chi + \varphi) \\ &\qquad\qquad + \frac{i}{2}\int\varphi(\Box + m^2)\varphi\Big] \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\int\varphi(\Box + m^2)\varphi\right]\langle\ \exp(i\mathcal{S}_{int}(\chi + \varphi)\ \rangle_0\end{aligned} \tag{8.47}$$

を得る．2 番目の等式で積分変数 χ を $\chi \to \chi + \varphi$ と変換した．山形括弧 $\langle\,\rangle$ は作用の自由場部分のみによる汎関数平均を表す．つまり，

$$\langle\mathcal{O}\rangle_0 = \mathcal{N}\int[d\chi]\exp\left[i\mathcal{S}_0(\chi) - \frac{1}{2}\epsilon\int\chi^2\right]\mathcal{O} \tag{8.48}$$

である．また，ϵ の 1 次の項については積分の収束性に影響を与えないのでゼロとした．(8.47) を (8.45) に代入すると，

$$\mathcal{F}[\varphi] = \langle\ \exp\left[i\mathcal{S}_{int}(\chi + \varphi)\right]\ \rangle_0 \tag{8.49}$$

となる．この式は $\mathcal{F}[\varphi]$ を作用 $\mathcal{S}$ の相互作用項を自由場で平均したものに関係づけている．指数関数を展開することで S 行列の摂動級数を直接求めることができる．χ の積の平均は，ガウス型の平均なので，2 点関数 $\langle\chi(x)\chi(y)\rangle_0$

の積を適当に対称化したものに分解される．ここでは，汎関数平均と S 行列を定義する際に，相互作用をもつ理論の完全な規格化因子 $\mathcal{N}$ を使ったが，最終的に S 行列が条件 $\mathcal{F}[0] = 1$ をみたすように規格化されていれば，自由場の理論の規格化因子を使って汎関数平均を定義してもよい．また，式 (8.49) は演算子公式 (5.85) の書き換えになっていることにも注意しよう．

ここまでの議論はスカラー場の理論に限られていたが，一般の理論にも簡単に拡張できる．具体的には S 行列汎関数を

$$\mathcal{F}[\varphi, a_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \langle \exp \left[i\mathcal{S}_{int}(\chi + \varphi, A_\mu + a_\mu, \varPsi + \psi, \bar{\varPsi} + \bar{\psi}) \right] \rangle_0 \quad (8.50)$$

と表すことができる．χ, A_μ, $\varPsi$ および $\bar{\varPsi}$ は上式が定義する汎関数平均の積分変数となる場であり，その積分測度には自由場の作用が重み（確率分布）として含まれる．

8.5　ユークリッド化と QED

4 章で議論したように，ユークリッド化された伝播関数と N 点関数はミンコフスキー空間から $x^4 \to ix^0$ とする解析接続で求めることができる．ユークリッド化された汎関数積分は，特に高次の計算において，非常に有用である．ユークリッド化された自由スカラー場と自由フェルミオン場の作用を

$$\mathcal{S}_{E0} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m)\psi \right] \quad (8.51)$$

と定義する．ここで，すべてのスカラー積はユークリッド計量 $\delta_{\mu\nu}$ で与えられ，γ 行列は $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ に従う．(8.18), (8.41) のユークリッド化は

$$\begin{aligned}\int [d\varphi d\psi d\bar{\psi}] \exp &\left[-\mathcal{S}_{E0}(\varphi, \bar{\psi}, \psi) + \int d^4x \, (J\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= C \exp \left[\int d^4x d^4y \left(\frac{1}{2} J(x) G_E(x,y) J(y) + \bar{\eta}(x) S_E(x,y) \eta(y) \right) \right]\end{aligned} \quad (8.52)$$

で与えられる．ただし，

$$G_E(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2+m^2} e^{ip(x-y)},$$
$$S_E(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{i\gamma\cdot p+m} e^{ip(x-y)} \tag{8.53}$$

である．より一般に相互作用がある場合は，ミンコフスキー空間での生成汎関数を Z とすると，ユークリッド化は次のように表される．

$$Z[J,\bar{\eta},\eta] = Z_E[J,\bar{\eta},\eta]\Big]_{x^4\to ix^0},$$
$$Z_E[J,\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int [d\varphi d\psi d\bar{\psi}] \exp\left[-\mathcal{S}_E(\varphi,\bar{\psi},\psi) + \int d^4x\,(J\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]. \tag{8.54}$$

つぎに，量子電磁力学 (QED) について考えよう．以前にみたように，QED の計算において光子の伝播関数は (6.23) で与えられる共変な形，つまり

$$D_{\mu\nu}(x,y) = \eta_{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2+i\epsilon}\, e^{-ik(x-y)} \tag{8.55}$$

にとることができた．対応するユークリッド伝播関数は

$$D_{E\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}\, e^{ik(x-y)} \tag{8.56}$$

となる．したがって，ユークリッド化された QED の汎関数積分は

$$Z_E[J,\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int [dAd\psi d\bar{\psi}]\, \exp\left[-\mathcal{S}_E + \int d^4x\,(A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right] \tag{8.57}$$

で与えられる．ここで，

$$\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi) = \int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu\right) + \bar{\psi}\left(\gamma\cdot(\partial - ieA) + m\right)\psi\right]$$
$$= \int d^4x\, \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2 + \bar{\psi}\left(\gamma\cdot(\partial - ieA) + m\right)\psi\right] \tag{8.58}$$

である．$\mathcal{N}$ はいつもどおり $Z[0,0,0]=1$ によって固定される．(8.57) の A についての積分は A の空間が標準的なユークリッド測度をもつものとして行われる．

(8.44) 以降で議論したように，汎関数積分の概念は古典的な作用の積分で

与えられるので，マクスウェルの作用 $\int \frac{1}{4}F^2$ あるいはそのユークリッド型の作用が公式 (8.57) で使われていると考えられるが，実際には (8.58) で与えられる作用を使わなければならない．これはゲージ変換と関係している．A_μ とそのゲージ変換 $A_\mu + \partial_\mu \theta$ は物理的には等価なので，場の変数の選択に重複が生じる．よって，マクスウェルの作用を積分する際に，この重複を除いた積分測度をもちいる必要がある．そのような測度をもちいると上の QED の公式が導かれる．(この測度についてはゲージ理論を扱う 10 章で詳しく議論する.) まとめると，すべての理論において，そのユークリッド化された生成汎関数は $\exp[-\mathcal{S}_E]$ の汎関数積分として表される．ここで積分は物理的な (つまり重複のない) すべての場の配位にわたって実行される．(QED の場合，さらにゲージについて平均をとる必要があり，その結果として公式 (8.57) が得られる．この点に関しては 10 章を参照されたい.)

8.6 非線形シグマ模型

非線形シグマ模型は場の理論の重要なモデルの 1 つである．この理論の場についての汎関数積分は自明でない積分測度をもつ．演算子の運動方程式と同時刻の交換関係をもちいたこれまでの手法に沿って，このことを見ていこう．

曲率がゼロでないリーマン空間 $\mathcal{M}$ を考えよう．その座標は φ^A，計量は

$$ds^2 = G_{AB} d\varphi^A d\varphi^B \tag{8.59}$$

で与えられる．計量テンソル G_{AB} は一般に座標 φ^A の関数である．このような空間上で運動する粒子の作用は

$$\mathcal{S} = \int d\tau \ \frac{1}{2} G_{AB} \frac{d\varphi^A}{d\tau} \frac{d\varphi^B}{d\tau} \tag{8.60}$$

となる．τ は粒子軌道のパラメータである．古典的な運動方程式は測地線の方程式であり，粒子の古典的な軌道は測地線をとる．この概念の一般化として，時空間からリーマン空間 $\mathcal{M}$ への写像を与える場 $\varphi^A(x)$ を考えることができる．時空間から写像されるリーマン空間 $\mathcal{M}$ は標的空間 (target space) と呼ばれる．このとき，作用は

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g}\, d^4x\ g^{\mu\nu}\, \frac{1}{2} G_{AB} \frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi^B}{\partial x^\nu} \tag{8.61}$$

となる．この作用は標的空間の計量によって決まる．一般に，時空間の（逆）計量は $g^{\mu\nu}$ で示される．ここでの定式化は，時空間の曲率がゼロでない場合にも適用される．また，ユークリッド化された時空間を考えることもできるが，この節では平坦なミンコフスキー空間 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ を考えよう．

作用 (8.61) で定義される場の理論を非線形シグマ模型と呼ぶ．これはカイラル模型と呼ばれることもある．(「シグマ模型」という名前の由来は歴史的なものである．すなわち，この名前は，カイラル対称性の破れに関する素粒子物理学の文献において，σ で表される場を使って線形な場の理論の模型が研究されたことに由来する．非線形シグマ模型はこの σ の質量を運動量に比べて大きくとったときに得られる模型のことである.)

この作用の古典的な運動方程式は

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[G_{AB} \frac{\partial \varphi^B}{\partial x_\mu}\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial G_{BC}}{\partial \varphi^A} \frac{\partial \varphi^B}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi^C}{\partial x_\mu} = 0 \tag{8.62}$$

である．この方程式の解は，時空間から標的空間 $\mathcal{M}$ への特別な写像を与える．つまり，この写像は測地線の一般化とみなせる．このような写像は数学では調和写像と呼ばれる．

この理論の物理における重要性はゴールドストンの定理と関係する．リー群 G で表される大域的な連続対称性をもつ場の理論を考えよう.(対称性が大域であるとは，対称性変換のパラメータが時空間によらず一定であることを指す.) このとき真空状態がこの対称性 G をもたず，その部分群 H のもとで対称であるならば，対称性 G は H に自発的に破れていると言われる．典型的な例は，ハイゼンベルクの強磁性体理論である．この理論では作用は 3 次元の回転について対称であるが，基底状態では，ある方向に自発的な磁化をもつので，この回転対称性が破れる．ゴールドストンの定理は，破れた対称性のそれぞれに対応する無質量粒子の存在を予言する．そのような無質量粒子は $(dim\, G - dim\, H)$ 個あり，南部–ゴールドストン粒子と呼ばれる[2]．さらに，これらの粒子は質量ゼロなので，質量のある粒子を励起させるだけの

---

[2] ［訳註］原文では，ゴールドストン粒子となっているが，正しくは，南部–ゴールドストン粒子と呼ぶべきであろう．

エネルギーを伴わない低エネルギー状態では，南部–ゴールドストン粒子間の相互作用が本質的な動力学を与える．南部–ゴールドストン・ボソンの作用は非線形シグマ模型 (8.61) で与えられる．このとき標的空間は群のコセット空間 G/H である．したがって，非線形シグマ模型は連続的対称性が自発的に破れるすべての物理現象において重要となる．(自発的対称性の破れについては 12 章で詳しく議論する.)

この節では，シグマ模型の汎関数積分を考えるにとどめる．以下では，これまでと同様に $Z[J]$ の方程式を導出することでこの汎関数積分を議論しよう．以前と同様に $Z[J]$ は

$$\begin{aligned} Z[J] &= \langle 0|\, T\ \exp\left(\int J_A\varphi^A\right)|0\rangle \\ &\equiv \langle\, T\ \exp\left(\int J_A\varphi^A\right)\,\rangle \end{aligned} \tag{8.63}$$

で定義される．場の正準交換関係は

$$\begin{aligned} &[\,\varphi^A(x^0,\boldsymbol{x}),\,\varphi^B(x^0,\boldsymbol{y})\,] = 0, \\ &[\,\varphi^A(x^0,\boldsymbol{x}),\,\Pi^0_B(x^0,\boldsymbol{y})\,] = i\,\delta^A_B\,\delta^{(3)}(x-y), \\ &[\,\Pi^0_A(x^0,\boldsymbol{x}),\,\Pi^0_B(x^0,\boldsymbol{y})\,] = 0 \end{aligned} \tag{8.64}$$

となる．ここで，$\Pi^\mu_A = G_{AB}\partial^\mu\varphi^B$ である．また，

$$F(x^0,y^0) = T\exp\left(\int_{y^0}^{x^0} dz^0\int d^3z J_A(z)\varphi^A(z)\right) \tag{8.65}$$

を定義しよう．これに時間微分を施すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0}F(x^0,y^0) &= \left[\int d^3zJ_A(x^0,\boldsymbol{z})\varphi^A(x^0,\boldsymbol{z})\right]F(x^0,y^0), \\ \frac{\partial}{\partial y^0}F(x^0,y^0) &= -F(x^0,y^0)\left[\int d^3zJ_A(y^0,\boldsymbol{z})\varphi^A(y^0,\boldsymbol{z})\right] \end{aligned} \tag{8.66}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\langle\, T\,\Pi^\mu_A(x)e^{\int J\varphi}\,\rangle \\ &\qquad = \partial_\mu\langle\, F(\infty,x^0)\Pi^\mu_A(x)F(x^0,-\infty)\,\rangle \\ &\qquad = \langle\, F(\infty,x^0)\big[\Pi^0_A(x),\int d^3zJ_A(x^0,\boldsymbol{z})\varphi^A(x^0,\boldsymbol{z})\big]\,F(x^0,-\infty)\,\rangle \end{aligned}$$

$$+\langle T\partial_\mu \Pi^\mu_A e^{\int J\varphi}\rangle$$
$$= -iJ_A(x)Z[J] + \frac{1}{2}\langle T\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}\frac{\partial\varphi^B}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^C}{\partial x_\mu}e^{\int J\varphi}\rangle \tag{8.67}$$

と書ける．1 番目の等式で関係式 (8.66) を，2 番目の等式で交換関係 (8.64) をもちいた．また，運動方程式 (8.62) は演算子についてのハイゼンベルクの運動方程式と解釈できる．ここで，

$$\langle TG_{AB}\partial^\mu\varphi^B e^{\int J\varphi}\rangle = \left[G_{AB}(\hat{\varphi})\frac{\partial\hat{\varphi}^B}{\partial x_\mu}\right]Z[J] \tag{8.68}$$

と書ける．ただし，$\hat{\varphi}^A = \delta/\delta J_A$ である．ここで $\partial^\mu\varphi^B$ の因子を真空期待値の外に出し，φ^B を J_B の汎関数微分で置き換える際に，時間順序による同時刻交換子が現れる可能性がある．実際に，そのような項は現れるが，これは φ と φ の交換子によるので (8.64) からゼロとなることがわかる．関係式 (8.68) をもちいると (8.67) の左辺を簡単にできる．同様の変形を右辺についても行おう．まず，

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu}\langle T\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A(x)}\partial^\mu\varphi^B(x)\varphi^C(z)\,e^{\int J\varphi}\rangle \equiv \frac{\partial}{\partial z^\mu}\langle T\,\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)\,\varphi^C(z)\,e^{\int J\varphi}\rangle \tag{8.69}$$

とし，これを変形する．このとき，z^0 微分を時間順序記号の内側に施す際に交換子が現れる．時間順序積を書き下すと

$$\begin{aligned} &T\,\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)\varphi^C(z)\,e^{\int J\varphi} \\ &= \Big[F(\infty,x^0)\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)F(x^0,z^0)\varphi^C(z)F(z^0,-\infty)\theta(x^0-z^0) \\ &\quad + F(\infty,z^0)\varphi^C(z)F(z^0,x^0)\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)F(x^0,-\infty)\theta(z^0-x^0)\Big] \end{aligned} \tag{8.70}$$

となる．(8.66) をもちいて微分を実行すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^\mu}\langle T\,\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)\varphi^C(z)\,e^{\int J\varphi}\rangle &= \langle T\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}\frac{\partial\varphi^B}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi^C}{\partial z^\mu}\,e^{\int J\varphi}\rangle \\ &\quad + i\,\langle\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}G^{BC}\delta^{(4)}(x-z)\,e^{\int J\varphi}\rangle \end{aligned} \tag{8.71}$$

を得る．ここで，

$$\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}[\partial^0\varphi^B(x^0,\boldsymbol{x}),\varphi^C(x^0,\boldsymbol{z})]$$
$$=\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}G^{BD}[G_{DE}\partial^0\varphi^E(x^0,\boldsymbol{x}),\varphi^C(x^0,\boldsymbol{z})]$$
$$=\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}G^{BD}[\Pi^0_D(x^0,\boldsymbol{x}),\varphi^C(x^0,\boldsymbol{z})]$$
$$=-i\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}G^{BC}\delta^{(3)}(x-z) \tag{8.72}$$

をもちいた．つぎに，$z\to x$ を考え，(8.71) の右辺第 1 項をもちいて (8.67) を変形しよう．この項は $\delta^{(4)}(0)$ を含むので運動量空間の体積が現れる．したがって，この項を正確に計算するには無限個あるモードを適当に有限化する必要がある．しかし，次のように形式的に計算を実行することもできる．まず，

$$\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}G^{BC}=\frac{\partial}{\partial\varphi^A}\mathrm{tr}\ \log G \tag{8.73}$$

と書けることに注意しよう．ここで，tr は添え字 B,C についてのトレースである．$\log G$ は積分核

$$\langle x|\log G|z\rangle=\delta^{(4)}(x-z)\log G \tag{8.74}$$

とみなせるので，汎関数のトレースと添え字 B,C のトレースをとると，

$$\mathrm{Tr}\ \log G=\delta^{(4)}(0)\,\mathrm{tr}\ \log G \tag{8.75}$$

を得る．ここで，Tr は関数空間でのトレースも含む．(8.71)–(8.75) をもちいると

$$\frac{1}{2}\langle T\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}\frac{\partial\varphi^B}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^C}{\partial x_\mu}e^{\int J\varphi}\rangle\Big]_{z\to x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z^\mu}\langle T\,\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)\varphi^C(z)\,e^{\int J\varphi}\rangle\Big]_{z\to x}$$
$$-\frac{i}{2}\langle\frac{\delta}{\delta\varphi^A(x)}\,(\mathrm{Tr}\log G)\,e^{\int J\varphi}\rangle \tag{8.76}$$

となる．右辺の期待値のなかの（φ で表された）項は期待値の外に出せる．これはこれらの項が $Z[J]$ の J についての汎関数微分で表されることによる．その際に現れる交換子は φ によるものだけなので，ゼロとなる．特に，右辺第 1 項では $\mathcal{O}^\mu_{CA}(x)\varphi^C(z)$ を $Z[J]$ にかかる汎関数微分演算子として取り出すことができる．z^μ に関する微分と $z\to x$ の極限はその後で考えればよい．

(8.68) と (8.76) を (8.67) に代入すると

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(G_{AB}(\varphi)\frac{\partial\varphi^B}{\partial x_\mu}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial G_{BC}}{\partial\varphi^A}\frac{\partial\varphi^B}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^C}{\partial x_\mu}\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi^A(x)}(\mathrm{Tr}\ \log G)\right]_{\varphi\to\hat{\varphi}} Z[J]=-iJ_A(x)Z[J] \tag{8.77}$$

を得る．作用 (8.61) をもちいると，この方程式は

$$\left[-\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi^A(x)}+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi^A(x)}\mathrm{Tr}\log G\right]_{\varphi\to\hat{\varphi}} Z[J]=-iJ_A(x)\,Z[J] \tag{8.78}$$

と表される．

汎関数による全微分項の積分は，境界での減衰性を要求すれば，ゼロとなるので

$$\int[d\varphi]\frac{\delta}{\delta\varphi^A}\exp\left(i\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G+\int J\varphi\right)=0 \tag{8.79}$$

と書ける．微分を実行すると，これは

$$\int[d\varphi]\left[i\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi^A(x)}+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi^A(x)}\mathrm{Tr}\log G+J_A(x)\right]e^{i\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G+\int J\varphi}=0 \tag{8.80}$$

となる．φ を J の微分として取り出すと，上式は

$$\left[-\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi^A(x)}+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi^A(x)}\mathrm{Tr}\log G\right]_{\varphi\to\hat{\varphi}}\int[d\varphi]e^{i\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G+\int J\varphi}$$
$$=-iJ_A(x)\int[d\varphi]e^{i\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G+\int J\varphi} \tag{8.81}$$

となる．(8.78) と比較すると，$Z[J]$ の解が汎関数積分

$$Z[J]=\mathcal{N}\int[d\varphi]\ \exp\left(i\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G+\int J\varphi\right)$$
$$=\mathcal{N}\int[d\varphi]\sqrt{\det G}\ \exp\left(i\mathcal{S}+\int J\varphi\right) \tag{8.82}$$

で与えられることがわかる．$\mathcal{N}$ は規格化因子である．

計量 $G_{AB}d\varphi^A d\varphi^B$ をもつリーマン空間の体積要素は $\sqrt{\det G}\prod d\varphi$ である．実際，この体積要素は上の計算でシグマ模型の汎関数測度として自然に現れた．その途中で現れた $\delta^{(4)}(0)$ についての処方はすでに明らかであろう．

つまり，汎関数行列式 $\det G$ を評価する適当な正則化を定義する必要がある．というのも，そのような行列式をもちいることによって，汎関数積分の正則化が実行できるからである．φ^4 理論で議論したように，φ^A の値が大きいときの汎関数積分の収束性から，$i\epsilon$ の項が追加されなければならなかった．（また，この項によって，伝播関数の計算においてファインマンの積分経路が選ばれたのであった．）同様に，ここでも $i\epsilon$ の項が付加される必要がある．これは境界での減衰性の条件を与えるので，汎関数における全微分項の積分 (8.79) は確かにゼロとなる．

8.7　連結グリーン関数

5 章でみたように，グリーン関数と S 行列汎関数の摂動展開からファインマン図が得られるが，このファインマン図には連結したものと非連結のものがある．例えば 2 次のオーダーで，図 8.1 は 2 つの連結要素から成る非連結なファインマン図である．一方，図 8.2 は連結したファインマン図の例である．高次のオーダーでは，当然，非連結のファインマン図が多数現れる．以下では，グリーン関数の生成汎関数（あるいは S 行列汎関数）と連結ファインマン図の生成汎関数との間に一般的な関係があることを示す．

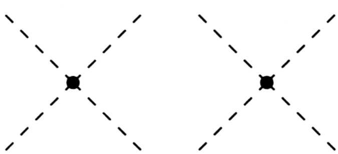


図 8.1　非連結図の一例．

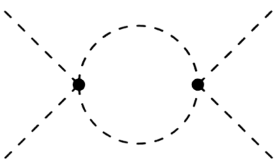


図 8.2　連結図の一例．

生成汎関数 $Z[J]$ は

$$Z[J] = \sum_N \frac{1}{N!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_N J(x_1) \cdots J(x_N) G(x_1, \ldots, x_N) \tag{8.83}$$

と展開できる．ただし，

$$G(x_1,\ldots,x_N) = \mathcal{N}\int[d\varphi]e^{-\mathcal{S}_E}\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)$$
$$\equiv \langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\rangle, \tag{8.84}$$
$$\mathcal{N}^{-1} = \int[d\varphi]e^{-\mathcal{S}_E} \tag{8.85}$$

である.(以下では，ユークリッド型のグリーン関数をもちいることとしよう.) グリーン関数は $\mathcal{N}e^{-\mathcal{S}_E}$ の確率分布を伴う場の平均である．非連結グリーン関数は，平均 $\langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\rangle$ が例えば $\langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)\rangle\,\langle\varphi(x_{k+1})\cdots\varphi(x_N)\rangle$ と因子化されるときに起こる．ここで，G^c を連結グリーン関数としよう．つまり，G^c_N は N 個の場をもつ完全に連結したグリーン関数である．一般のグリーン関数は連結グリーン関数の積の和として表される．$G(x_1,\ldots,x_N)$ が n_1 個の G^c_1, n_2 個の G^c_2, 等々をもつとしよう．このとき，$G(x_1,\ldots,x_N)$ の因子化の仕方は，N 粒子を 1 粒子の入る n_1 個の箱，2 粒子の入る n_2 個の箱，等々に分配される場合の数で与えられる．議論の便宜上，$Q=\int d^4xJ(x)\varphi(x)$ と定義すると，$Z[J]$ の展開は Q の積の平均として表される．N 個の Q の積の平均を G_N とする．G_N の分配の仕方は，n_k 個の箱の入れ換えおよび，箱のなかの k 個の粒子の入れ換えによらない．よって，G_N は $\sum_k n_k k = N$ の条件のもとで

$$G_N = \sum_{\{n_k\}} N!\left[\frac{(G^c_1)^{n_1}}{n_1!}\frac{(G^c_2/2!)^{n_2}}{n_2!}\cdots\right] \tag{8.86}$$

と分配することができる．したがって，

$$G_N = \sum_{\{n_k\}} N!\delta\left(N-\sum n_k k\right)\prod_s \frac{(G^c_s/s!)^{n_s}}{n_s!} \tag{8.87}$$

と書ける．つぎに，上式を (8.83) にもちいよう．(8.83) の N についての和は条件 $\delta(N-\sum n_k k)$ によって処理されるので,

$$\begin{aligned}Z[J] &= \sum_N \delta\left(N-\sum n_k k\right)\sum_{\{n_k\}}\frac{(G^c_1)^{n_1}}{n_1!}\frac{(G^c_2/2!)^{n_2}}{n_2!}\frac{(G^c_3/3!)^{n_3}}{n_3!}\cdots\\ &= \sum_{\{n_k\}}\frac{(G^c_1)^{n_1}}{n_1!}\frac{(G^c_2/2!)^{n_2}}{n_2!}\frac{(G^c_3/3!)^{n_3}}{n_3!}\cdots\\ &= \exp(G^c_1)\exp\left(\frac{G^c_2}{2!}\right)\cdots\end{aligned}$$

$$= \exp(W[J]) \tag{8.88}$$

となることがわかる．ここで，

$$\begin{aligned} W[J] &= G_1^c + \frac{1}{2!}G_2^c + \cdots \\ &= \int d^4x J(x) G^c(x) + \frac{1}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2)G^c(x_1,x_2) + \cdots \\ &= \sum_N \frac{1}{N!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_N J(x_1)\cdots J(x_N)G^c(x_1,\ldots,x_N) \end{aligned} \tag{8.89}$$

である．つまり，$W[J]$ は連結グリーン関数の生成汎関数である．

これまでの結果は規格化された確率分布 $\mathcal{N}e^{-\mathcal{S}_E}$ をもちいて得られた．したがって，純粋に真空のファインマン図はここでは現れない．それらは $\int[d\varphi]e^{-\mathcal{S}_E}$ で与えられ，規格化因子で相殺される．真空の場合についても，(8.89) と同様な結果が成り立つ．また，有限温度あるいは有限密度で計算を行う場合，平均 $\int[d\varphi]e^{-\mathcal{S}_E}$ は統計力学における分配関数とみなせる．このとき，温度や化学ポテンシャルといった支配パラメータの依存性が重要になる．(背景となる熱浴が真空状態の役割を担う.）この場合にも (8.89) と類似した結果が得られる．これは

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1} \equiv \int[d\varphi]e^{-\mathcal{S}_E} &= \langle e^{-\mathcal{S}_{int}}\rangle_0 \\ &= \sum_N \frac{1}{N!}\langle(-\mathcal{S}_{int})^N\rangle_0 \end{aligned} \tag{8.90}$$

と表すとよくわかる．ただし，平均は自由場の作用をもちいて計算されるとする．(8.87) を求める際に Q の分配の仕方について考えたように，ここでも連結した関数をもちいて $\mathcal{S}_{int}$ を分配する方法を考えると，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1} &= \sum_N \delta\Big(N - \sum n_k k\Big)\sum_{\{n_k\}} \frac{(\langle\mathcal{S}_{int}\rangle^c)^{n_1}}{n_1!}\frac{(\langle\mathcal{S}_{int}^2\rangle^c/2!)^{n_2}}{n_2!}\frac{(\langle\mathcal{S}_{int}^3\rangle^c/3!)^{n_3}}{n_3!}\cdots \\ &= \sum_{\{n_k\}} \frac{(\langle\mathcal{S}_{int}\rangle^c)^{n_1}}{n_1!}\frac{(\langle\mathcal{S}_{int}^2\rangle^c/2!)^{n_2}}{n_2!}\frac{(\langle\mathcal{S}_{int}^3\rangle^c/3!)^{n_3}}{n_3!}\cdots \\ &= \exp(\langle\mathcal{S}_{int}\rangle^c)\exp\left(\frac{\langle\mathcal{S}_{int}^2\rangle^c}{2!}\right)\cdots \\ &= \exp(W) \end{aligned} \tag{8.91}$$

と書けることがわかる．山形括弧 $\langle\cdots\rangle^c$ の上添え字 c は連結した真空ファインマン図が対応する $\mathcal{S}_{int}$ の数だけあることを示す．また，W はそのような連結した真空ファインマン図の総和を表す．(ここで真空ファインマン図とは，統計力学の枠組みでは，熱浴あるいは他の熱揺らぎ効果における粒子の相互散乱過程を意味する．この散乱過程は閉じたものであり，熱浴以外の入射・放射粒子は関与しない.)

8.8 量子的な有効作用

連結グリーン関数の生成汎関数に密接に関連したものとして，量子的な有効作用 $\varGamma[\varPhi]$ がある．これは次のように $W[J]$ のルジャンドル変換として定義される．

$$\varGamma[\varPhi] = \int J\varPhi - W[J]. \tag{8.92}$$

$\varPhi$ と J の関係は次式で定義される．

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varGamma}{\delta\varPhi(x)} &= J(x), \\ \frac{\delta W}{\delta J(x)} &= \varPhi(x). \end{aligned} \tag{8.93}$$

これらは，$W[J]$ による $\varGamma[\varPhi]$ の定義式，あるいは $\varGamma[\varPhi]$ による $W[J]$ の定義式とみなせる．$W[J]$ が与えられた場合，(8.93) の第 2 式から J を自由変数 $\varPhi$ の関数として求め，これを (8.92) に代入して $\varGamma[\varPhi]$ を得る．逆に，$\varGamma[\varPhi]$ が与えられると，(8.93) の第 1 式から $\varPhi$ を変数 J の関数として求め，(8.92) をもちいて $W[J]$ を定義できる．$\varGamma[\varPhi]$ を $\varPhi$ で展開すると，

$$\varGamma[\varPhi]=\sum_N \frac{1}{N!}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_N\,\varPhi(x_1)\varPhi(x_2)\cdots\varPhi(x_N)\tilde{V}(x_1,x_2,\ldots,x_N) \tag{8.94}$$

と書ける．係数 $\tilde{V}(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ は頂点関数，つまり (5.25) にあるような外線のないグリーン関数であることが簡単に確認できる．実際には，これらは 1 粒子既約な関数である．ファインマン図の表現において，頂点関数やグリーン関数が 1 粒子既約 (1PI) であるとは，そのファインマン図に含まれる任意の 1 粒子伝播関数 1 つを切断してもファインマン図が非連結にならない

ことを意味する．一方，非連結になる場合は可約であるといわれる．$\Gamma[\Phi]$ はすべての 1PI 頂点関数を生成する．

関係式 (8.93) から

$$\int d^4 z \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(z)}\right] \tilde{G}(z, y) = \delta^{(4)}(x - y) \tag{8.95}$$

と書ける．ここで，

$$\tilde{G}(x, y) = \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} \tag{8.96}$$

である．(8.95) の結果は $\delta \Phi(x)/\delta J(y)$ と $\delta J(x)/\delta \Phi(y)$ が互いに逆であることから導ける．(8.95) あるいは (8.96) では，$J = 0$ としていないことに注意しよう．(8.95) において $\Phi(x)$ についての微分を繰り返し行い，関係式 (8.93) をもちいると，Γ の展開式の係数 $\tilde{V}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ は確かに 1PI 頂点関数を与えることがわかる．

$Z[J]$ の運動方程式から直接 Γ の運動方程式を導くことができる．汎関数積分表示

$$Z[J] = \mathcal{N} \int [d\varphi] \, \exp\left[-S_E(\varphi) + \int J\varphi\right] \tag{8.97}$$

をもちいると，運動方程式は

$$\left[\frac{\delta S_E}{\delta \varphi}\right]_{\varphi = \frac{\delta}{\delta J}} Z[J] = J \, Z[J] \tag{8.98}$$

と表せる．実際，この $Z[J]$ の汎関数積分はミンコフスキー空間での $Z[J]$ の方程式 (5.9) あるいは (8.30) から得られた．上式の左辺は高次の J 微分が $Z[J]$ に作用する項を含む．これは次のように変形できる．(8.93) に $W = \log Z$ を代入し，J について微分を行うと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} &= \frac{\delta \Phi(x_1)}{\delta J(x_2)} + \Phi(x_1) \Phi(x_2) \\
&= \tilde{G}(x_1, x_2) + \Phi(x_1) \Phi(x_2) \\
&= \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdot 1
\end{aligned} \tag{8.99}$$

を得る．ここで，

$$\hat{\phi}(x_1) = \Phi(x_1) + \int d^4 x_2 \, \tilde{G}(x_1, x_2) \frac{\delta}{\delta \Phi(x_2)} \tag{8.100}$$

である．もう一度，微分を行うと

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z}\frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)} &= \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + \Phi(x_1)\tilde{G}(x_2,x_3) \\
&\quad + \Phi(x_2)\tilde{G}(x_3,x_1) + \Phi(x_3)\tilde{G}(x_1,x_2) \\
&\quad + \int_{x_4} \tilde{G}(x_1,x_4)\frac{\delta\tilde{G}(x_2,x_3)}{\delta\Phi(x_4)} \\
&= \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\cdot 1
\end{aligned}
\tag{8.101}
$$

を得る．ここで再度 (8.96) をもちいた．これより J 微分は $\hat{\phi}$ の作用で置き換えられることがわかる．したがって，(8.98) を次のように書くことができる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(x)} &= \left[\frac{\delta S_E}{\delta\varphi(x)}\right]_{\varphi=\hat{\phi}}\cdot 1, \\
\int d^4z\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(z)}\right]\tilde{G}(z,y) &= \delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned}
\tag{8.102}
$$

2 番目の式は (8.95) と同じである．ここで，これは Γ による $\tilde{G}(x,y)$ の定義式と解釈できる．$\tilde{G}(x,y)$ がこのように与えられたとすると，(8.102) の第 1 式は $\Gamma[\Phi]$ の非線形方程式となる．場の古典的な作用 S_E が決まると，直接，方程式 (8.102) を導くことができる．よって，これらの式は場の量子論を定義する基礎方程式であると考えられる．この手法では，(8.92) のように $W[J]$ は導かれる量であり，次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
W[J] &= \int J\Phi\ -\ \Gamma[\Phi], \\
J(x) &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(x)}.
\end{aligned}
\tag{8.103}
$$

第 2 式は J を Φ の関数として定義する式である．(8.102) の両式は，場の量子論の定義とみなすことができる．これらはシュウィンガー–ダイソン (Schwinger–Dyson) 方程式と呼ばれる方程式の汎関数表示である．この方程式は任意の場の理論においても同様に構成することができる．

シュウィンガー–ダイソン方程式を φ^4 理論の場合に詳しくみてみよう．ユークリッド作用は

$$
S_E = \int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4\right] \tag{8.104}
$$

である．(8.102) の第 1 式は

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(x)}=K\Phi(x)+4\lambda\Phi^3(x)+12\lambda\Phi(x)\tilde{G}(x,x)$$
$$-4\lambda\int_{z_1,z_2,z_3}\tilde{G}(x,z_1)\tilde{G}(x,z_2)\tilde{G}(x,z_3)\tilde{V}_\Phi(z_1,z_2,z_3)\quad(8.105)$$

となることがわかる．ここで，$K=(-\Box+m^2)$ であり，また

$$\frac{\delta\tilde{G}(x,y)}{\delta\Phi(z)}=-\int_{z_1,z_2}\tilde{G}(x,z_1)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Phi(z_1)\delta\Phi(z_2)\delta\Phi(z)}\tilde{G}(z_2,y)$$
$$=-\int_{z_1,z_2}\tilde{G}(x,z_1)\tilde{V}_\Phi(z_1,z_2,z)\tilde{G}(z_2,y),\quad(8.106)$$
$$\tilde{V}_\Phi(z_1,z_2,z)\equiv\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Phi(z_1)\delta\Phi(z_2)\delta\Phi(z)}$$

と書けることをもちいた．(8.102) の第 2 式からわかるように，$\tilde{G}(x,y)$ は $\delta^2\Gamma/\delta\Phi(y)\delta\Phi(z)$ の逆関数である．また，$\tilde{V}_\Phi$ は Φ に依存する頂点関数である．Φ がゼロのとき，これらは通常の頂点関数 (8.94) になる．同様に，$\tilde{G}(x,y)$ は $\Phi=0$ のときに伝播関数となる．

Γ の 2 階微分は

$$\tilde{V}_\Phi(1,2)=K(1,2)+12\lambda\left[\Phi(1)^2+\tilde{G}(1,1)\right]\delta(1,2)$$
$$-12\lambda\Phi(1)\int_{3,4}\tilde{G}(1,3)\tilde{G}(1,4)\tilde{V}_\Phi(3,4,2)$$
$$+12\lambda\int_{3,\ldots,7}\tilde{G}(1,3)\tilde{V}_\Phi(3,4,2)\tilde{G}(4,5)\tilde{G}(1,6)\tilde{G}(1,7)\tilde{V}_\Phi(5,6,7)$$
$$-4\lambda\int_{3,4,5}\tilde{G}(1,3)\tilde{G}(1,4)\tilde{G}(1,5)\tilde{V}_\Phi(3,4,5,2)\quad(8.107)$$

で与えられる．ここで，$\tilde{G}(1,2)=\tilde{G}(x_1,x_2)$, $K(1,2)=(-\Box_1+m^2)\delta(x_1,x_2)$ などの簡略化を行った．φ^4 理論は $\Phi\to-\Phi$ の対称性をもつので，Φ をゼロにすると，3 点の頂点関数は消える．よって，(8.102) の第 2 式は

$$\int_3 V(1,3)G(3,2)=\delta(1,2),$$
$$V(1,2)=K(1,2)+\Sigma(1,2),\quad(8.108)$$

$$\Sigma(1,2) = 12\lambda G(1,1)\delta(1,2) - 4\lambda \int_{3,4,5} G(1,3)G(1,4)G(1,5)V(3,4,5,2)$$

と表せる．$V(1,2)$ の定義式は高次の頂点関数 V（この場合は 4 点関数）を含む．(8.105) あるいは (8.107) をさらに微分するとより高次の頂点関数が得られる．この頂点関数はさらに高次の項を含むので，式が無限に連鎖していることがわかる．意味のある計算結果を得るにはこの連鎖をある段階で切断する必要がある．例えば，4 点の頂点関数は

$$V(1,2,3,4) = 4!\,\lambda\,\delta(1,2)\delta(2,3)\delta(2,4) + \cdots \tag{8.109}$$

と表されるが，この第 1 項のみを残して，それ以外の項を落とすと，

$$\Sigma(1,2) \approx 12\lambda G(1,1)\delta(1,2) - 4!\,4\lambda^2 G(1,2)^3 \tag{8.110}$$

を得る．これを (8.108) にもちいると，伝播関数 $G(1,2)$ についての有限次数の連立方程式が得られる．

シュウィンガー–ダイソン方程式は厳密な伝播関数と厳密な頂点関数による連立方程式である．これらに対して自由伝播関数のまわりで摂動展開を行うことができる．$G_0(x,y)$ を自由伝播関数としよう．添え字はこれが自由場の理論の伝播関数であることを意味する．すると，G の関係式は積分方程式

$$G(1,2) = G_0(1,2) - \int_{3,4} G_0(1,3)\Sigma(3,4)G(4,2) \tag{8.111}$$

と変形できる．$\Sigma(1,2)$ をもちいると，これは G の級数展開を与える．(8.109) の近似を使い，結果を G の摂動展開の一般形と比較すると，(8.108) の関係式は無限個のファインマン図を再和 (resummation) したものとなっていることがわかる．

8.9 有効作用と S 行列

前節では，古典的な作用から有効作用 Γ を直接定義することによって，理論の量子化を考えたが，この見方はそのまま散乱行列の計算へ拡張することができる．(5.27) でみたように，S 行列汎関数は

$$\mathcal{F}[\varphi] = Z[i(\Box + m^2)\varphi] = e^{W[J]}\Big|_{J=i(\Box+m^2)\varphi} \tag{8.112}$$

と表される.（ここで，自明な因子 $e^{-\frac{i}{2}\int \varphi(\Box+m^2)\varphi}$ は以下の議論に関係ないので省略した.）S 行列要素は (5.24) で行ったように，φ を自由粒子の 1 粒子波動関数で置き換えて得られる．自由粒子の 1 粒子波動関数は条件 $(\Box+m^2)\varphi = 0$ つまり $J = 0$ をみたす.（ただし，これは J や φ についての必要な数の微分を行った後に課せられるべき条件である.）ミンコフスキー空間での式 (8.92) を考えると

$$W[J] = \int d^4x\, J\Phi + i\Gamma[\Phi] \tag{8.113}$$

と書ける．J がゼロのとき，

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi} = 0 \tag{8.114}$$

となる．式 (8.114) の解で評価すると，W は $i\Gamma[\Phi]$ となる．言い換えると，(8.112), (8.114) から

$$\mathcal{F} = \hat{S} = \exp\Big(i\,\Gamma[\Phi]\Big)\Bigg|_{\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi}=0} \tag{8.115}$$

と表せる．

S 行列は，量子的な有効作用を方程式 (8.114) の解で評価したものである．この関係は，S 行列の非摂動的な定義とみなせる．方程式 $\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi} = 0$ の解はいくつかの変数で表せる．$\hat{S}$ は解を指定するこれらのデータに依存している．摂動的な場合には，これらのデータは φ の運動方程式の解を $\varphi = \sum_k a_k u_k(x) + a_k^* u_k^*(x)$ と書いたときの振幅 a_k, a_k^* で与えられる．ここで，a_k, a_k^* は c 数の値をもつ量とみなせる．ある過程の散乱振幅は $\hat{S}$ を a_k, a_k^* で適当に微分し，最後にこれらをゼロとすることによって得られる．このような S 行列の定義にはさまざまな応用が考えられる．例えば，この定義をもちいると，多くの外線数をもつ散乱振幅を外線の数の少ない散乱振幅から再帰的に生成するような漸化式を導くことができる．

式 (8.114) は有効的な量子運動方程式とみなすことができる．つまり，これは，c 数の式でありながら，量子効果の情報をすべて含んでいる方程式であると考えられる．よって，Γ は 1 粒子既約なファインマン図の生成汎関数であるだけでなく，場の量子論を完全に定義する量でもあることがわかる．運

動方程式（つまり Γ の極値化条件式）を解くことで，S 行列を定義できる．また，この定義をもちいて理論の非摂動的側面の解析（例えば，自明でない基底状態の特性の解析）を行うことができる．これまでの議論のほとんどの場合において，系の基底状態は自由場の理論の基底状態であった．摂動論においてはこれで問題ないが，基底状態が相互作用によって変更を受ける場合も数多く存在する．その場合，新しい基底状態が力学的に優位かどうかを知るには，非摂動的な解析が必要となる．そのためには，Γ を（非摂動的に）計算し，それに付随する極値化条件を考えればよい．

8.10　ループ展開

グリーン関数あるいは $W[J]$ のファインマン図による展開式は，Γ に現れる頂点関数の図形的な展開式を導く．Γ を $\hbar$ でベキ展開することで，展開式を系統的に求めることができるが，これは概念的にも実践的な計算においても有用である．

$Z[J]$ の汎関数表示は

$$Z[J] = \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_E(\varphi) + \int J\varphi\right] \tag{8.116}$$

で与えられる．これは (8.97) と同じであるが，ここでは $\hbar$ を明示して書いた．伝播関数 G は K の逆演算子であり，$\frac{1}{2}\int \varphi K \varphi$ は自由場の作用なので，$\hbar$ を含めると $G = \hbar K^{-1} \sim \hbar$ となることがわかる．(8.116) から，頂点関数は $1/\hbar$ のオーダーであることもわかる．Γ の任意の項が i で指定されるタイプの頂点 V_i をもち，内線あるいは伝播関数の数が I，外線の数が E であるファインマン図によって表されるとき，

$$\sum_i v_i V_i - 2I = E \tag{8.117}$$

の関係が成り立つ．ここで，v_i はタイプ i の頂点の価数である．例えば，$\lambda\varphi^4$ の相互作用をもつとき価数は 4 とする．E 本の外線はそれぞれ運動量を伴う．I 本の内線運動量は各頂点における運動量保存を表す δ 関数で拘束される．1 つの δ 関数は単に全体の運動量保存を表すので，$(\sum_i V_i - 1)$ 個の δ 関数が

内線運動量を拘束している．拘束を受けない内線運動量はループ運動量であり，それについては積分をとる．したがって，ループ運動量またはループの数を L とすると

$$L = I - \left(\sum_I V_i - 1 \right) \tag{8.118}$$

を得る．$\hbar$ の次数は $I - \sum_i V_i$ であり，上式よりこれは $L-1$ と等しい．よって，ファインマン図が L 個のループをもつ項は $\hbar^{L-1}$ のオーダーをもつ．このようにして，量子的有効作用は次のように展開できることがわかる．

$$\frac{1}{\hbar}\Gamma[\Phi] = \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1}\, \Gamma^{(L)}[\Phi]. \tag{8.119}$$

$L=0$ の項は古典論に対応する．（古典論はループをもたない．）ループのない図形はツリー・ダイヤグラム (tree diagram) と呼ばれる．この $\hbar$ 展開は量子補正を分類・解析するための系統的な手法である．

展開式 (8.119) の $\Gamma^{(0)}[\Phi]$ は実際に古典作用 $S_E(\Phi)$ を与える．これは次のようにわかる．Γ の定義を $\hbar$ の因子を明示して (8.116) にもちいると

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\Gamma[\Phi]\right) &= \mathcal{N}\int [d\varphi]\, \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E(\varphi) + \int J(\varphi - \Phi)\right) \\
&= \mathcal{N}\int [d\varphi]\, \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E(\varphi + \Phi) + \int J\varphi\right) \\
&= \mathcal{N}\int [d\varphi]\, \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E(\varphi + \Phi) + \frac{1}{\hbar}\int \varphi \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi}\right)
\end{aligned} \tag{8.120}$$

と書ける．展開式 (8.119) と φ のベキによるテイラー展開をもちいると

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1}\, \Gamma^{(L)}[\Phi]\right) &= \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E(\Phi)\right) \\
&\quad \times \int [d\varphi]\, \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int \varphi \left(\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta \Phi} - \frac{\delta S_E}{\delta \Phi}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2\hbar}\int \varphi \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta\varphi\delta\varphi}\right)_{\Phi} \varphi + \cdots \right]
\end{aligned} \tag{8.121}$$

となる．$\hbar$ 展開の最初の 2 項は

$$\Gamma^{(0)}[\Phi] = S_E(\Phi),$$
$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \frac{1}{2}\log\det\left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right)_\Phi \tag{8.122}$$

で与えられる．ただし，ここでの行列式は汎関数行列式である．例えば，$\lambda\varphi^4$ 理論ではこれは

$$\Gamma = \int\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \lambda\Phi^4\right] + \frac{\hbar}{2}\log\det(-\Box + m^2 + 12\lambda\Phi^2) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{8.123}$$

となる．汎関数行列式の定義およびその計算には恒等式 $\mathrm{Tr}\log A = \log\det A$ がもちいられる．これは A が対角行列のときに当然成り立つが，一般にすべての行列にも成り立つ．というのも，対角化可能な行列は稠密な行列で与えられるからである．これより，

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar}{2}\log\det(-\Box + m^2 + 12\lambda\Phi^2)\\ &\quad= \frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\log(-\Box + m^2 + 12\lambda\Phi^2)\\ &\quad= \frac{\hbar}{2}\int d^4x\langle x|\log(-\Box + m^2 + 12\lambda\Phi^2)|y\rangle\Big]_{y\to x}\end{aligned} \tag{8.124}$$

と計算される．これを Φ で展開すると，1 ループのファインマン図に対応した一連の項が現れる．その外線あるいは Φ の数は展開式に対応して増加する．この結果についての一般公式の導出は困難である．というのも，Φ は x に依存し，Φ の微分をいくらでも考えることができるからである．もし非常にゆっくりと変化する Φ だけに興味があるならば，Φ の微分を無視し Φ 一定と仮定することで，汎関数行列式を明確に評価できる．これはまた，行列式を Φ にかかる微分でベキ展開し，その最低次数の項をとることに相当する．一定の場に対応する Γ の項は有効ポテンシャルと呼ばれる．この 1 ループ次数での定義およびその計算はコールマンとワインバーグによってなされた．有効ポテンシャルの 1 ループ補正（つまり Φ の微分を含まない最低次の項）は

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar}{2}\int d^4x\langle x|\log(-\Box + m^2 + 12\lambda\Phi^2)|y\rangle\Big]_{y\to x}\\ &\qquad\qquad= \frac{\hbar}{2}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\log(k^2 + s) \equiv F(s)\end{aligned} \tag{8.125}$$

で与えられる．ここで，$s = m^2 + 12\lambda\Phi^2$ であり，

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s)}{\partial s} &= \frac{\hbar}{2}\int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+s} \\ &= \frac{\hbar}{2}\int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+s}} \end{aligned} \tag{8.126}$$

となる．これを積分すると，

$$F(s) = \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2}\hbar\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+s} - \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+m^2}\right] \tag{8.127}$$

と表せる．体積積分を除くと，F は m^2 を s で置き換えたときのゼロ点エネルギーの和を与える．また，s 積分の積分定数は自由場の理論のゼロ点エネルギーに選んである．そのため，$F(s)$ は Φ^4 の相互作用がなければゼロとなる．(8.127) の k 積分は発散する．これを適切に扱うには，運動量に上限を与え，発散の可能性のある項を理論のさまざまなパラメータに吸収させればよい．これは次章で議論する繰り込みの手法である．ここでは，運動量 $|\boldsymbol{k}|$ の上限，すなわちカットオフを Λ で表し，この積分を計算すると，

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{\hbar}{32\pi^2}\int d^4x \Bigg[& 24\lambda\Phi^2\left(\Lambda^2 + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right) \\ & + (12\lambda\Phi^2)^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right) \\ & + \frac{1}{2}(m^2+12\lambda\Phi^2)^2\log\left(1+\frac{12\lambda\Phi^2}{m^2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{8.128}$$

を得る．議論を完結するために，繰り込まれた形の有効作用を以下に示そう．ただし，その詳細については後で議論する．1 ループのオーダーで繰り込みを行った後の Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma = \int & \left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \lambda\Phi^4\right] \\ & + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left[(m^2+12\lambda\Phi^2)^2\log\left(1+\frac{12\lambda\Phi^2}{m^2}\right) - 12\lambda m^2\varphi^2 - 216\lambda^2\varphi^4\right] \end{aligned} \tag{8.129}$$

で与えられる．

前節の最後に触れたように，Γ の極値化によって量子論を定義することができる．(8.129) ではゆっくりと変化する場を仮定し，1 ループ補正を行った．Γ の変分をゼロにすると，ソース J はゼロとなり，したがって，Φ は $\langle 0|\phi|0\rangle$ となることに注意しよう．これは，真空（あるいは基底状態）の期待値である．基底状態が並進不変性をもつ場合，この期待値は一定である．したがって，理論の真空が並進不変であると仮定すると，Φ の勾配を無視する有効ポテンシャルによる近似法は，本来の理論における ϕ の真空期待値を解析するのに適していることがわかる．ここでの 1 ループ有効作用の計算は，そのような解析へ向けての 1 次近似であると考えられる．

参考文献

1. 汎関数積分の場の量子論への応用はいまや多くの教科書で扱われている．初期の研究として F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press (1966) があるが，これは特にフェルミ粒子に関する標準的な文献である．また，原論文を多く含む良書として J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag (1981 & 1987) がある．

2. ユークリッド化されたグリーン関数の系統的な研究は以下の文献から始まった．J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **44**, 956 (1958); Phys. Rev. **115**, 721 (1959); K. Symanzik, J. Math. Phys. **7**, 510 (1966); in *Local Quantum Theory*, R. Jost (ed.), Academic Press (1969). また，ユークリッド形式とミンコフスキー形式の一般的な対応関係は K. Osterwalder and R. Schrader, Commun. Math. Phys. **31**, 83 (1973); *ibid.* **42**, 281 (1975) で与えられた．

3. 非線形シグマ模型におけるリーマン測度の導出は I.S. Gerstein, R. Jackiw, B.W. Lee and S. Weinberg, Phys. Rev. **D3** 2486 (1971) で与えられた．また，関連文献として J. Honerkamp and K. Meetz, Phys. Rev. **D3**, 1996 (1971); A. Slavnov, Nucl. Phys. B31, 301 (1971) を参照されたい．

4. 1 粒子既約なファインマン図の重要性は QED の繰り込みについてのダイソンの古典的な研究で認識された．これについては J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958) を参照されたい．有効作用 Γ は J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962). で定義された．W のルジャンドル変換による Γ の導出は G. Jona-Lasinio, Nuovo. Cim. **34**, 1790 (1964) による．

5. シュウィンガー–ダイソン方程式は次の文献で導出された．F. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949); J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 452 and 455 (1951).

6. S 行列と Γ の関係は次の文献で解析されている. L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields, Introduction to the Quantum Theory*, Benjamin-Cummings, MA (1980); A. Jevicki and C. Lee, Phys. Rev. **D37** (1988) 1485; C. Kim and V.P. Nair, Phys. Rev. **D55**, 3851 (1997).

7. 有効ポテンシャルとその1ループの計算は S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973) で与えられた.

第9章

繰り込み

9.1 繰り込みの一般的な手続き

すでに見たように，有効作用 Γ は $\Gamma = \sum_L \hbar^L \Gamma^{(L)}$ と $\hbar$ で級数展開できる．ただし，$\Gamma^{(L)}$ はファインマン図において L ループの1粒子既約 (1PI) な頂点関数を生成する．このループ積分は，相互作用によってさまざまな中間状態に仮想的な遷移が起こることに対応している．あるいは，入射場が真空の場の量子的な揺らぎと相互作用すると考えてもよい．(真空の量子的な揺らぎの存在は，場とその共役運動量が可換でないことから必然的に導かれる.) ループ積分の運動量に何らかの制限がない場合，すなわち十分に大きな運動量をもつ仮想的状態への遷移が起こりうる場合，ループ積分のなかには発散するものも現れるはずである．このことは，実際には，短距離において点状の相互作用をもつ場の理論によって非常に大きな運動量をもつ（あるいは非常に短い距離の）物理世界を記述するのは困難であることを意味している．つまり，これらの理論はある非常に大きな運動量 Λ よりも小さな運動量領域でのみ有効な理論であると考えなければならない．すべてのループ積分は，この Λ の値で何らかの方法によって切断されなければならない．このように高い運動量つまり紫外領域でループ積分を切断する手続きを，正則化もしくは正則化の手続きと呼ぶ．その結果得られる理論は紫外切断（カットオフ）をもち，そのため積分の発散がない．このような理論を正則化された理論と呼ぶ．場の量子論を作る目的の1つは，このような正則化された理論で物理現象の記述を与えることである．

したがって，実際の計算に場の量子論を使うためには，次の点を考慮に入れなければならない．

1. まず，すべてのループ積分が数学的に正しく定義され有限となるための正則化が必要である．正則化を行って計算された結果は紫外切断 Λ によっており，これはどのような正則化をするかによって決まる．よって，特別な正則化を選ぶ何か良い理由がない限り，ラグランジアンが与えられても理論から一意的な予測を導くことは難しい．
2. S 行列などを計算するとその結果は，ラグランジアンに現れる結合定数（一般に λ_0 で表される）や質量 (m_0 で表される) などのパラメータにも依存する．(これらのパラメータは裸のパラメータと呼ばれる．) 実際に測定される結合定数や質量は，このラグランジアンに現れるパラメータとは異なる．なぜなら，これらの量は一般に相互作用のために補正を受けるからである．よって，測定される結合定数や質量は，裸の結合定数や質量および紫外切断 Λ の関数である．これらは正則化を選べば計算できる関数である．S 行列や有効作用 Γ のような計算結果を解釈し実験と比較するには，これらの結果を実際に測定されるパラメータ λ や m で書き表さなければならない．

これら2つの問題は互いに関係している．繰り込みの考え方は，計算された量についてのすべての Λ 依存性または正則化に対する依存性を，観測されるパラメータ λ, m と裸のパラメータ λ_0, m_0 の間の関係式に吸収してやることである．言い換えると，計算された結果を実際に観測されたパラメータで表したとき，それらは正則化の選び方によらないということである．よって，ループによる補正を計算した後ですべてを観測されたパラメータで書き換えると，理論から一意的な予測を導くことができる．測定されたパラメータ λ, m はしばしば繰り込まれたパラメータと呼ばれる．

パラメータの変換は最初のラグランジアンそのものに対して行うことができる．例えば，4次の相互作用をもつスカラー場の理論の場合，

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\,\chi^2\right] + \lambda_0\,\chi^4 \tag{9.1}$$

$$= Z_3 \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 - \delta m^2)\varphi^2 \right] + Z_1 \lambda \varphi^4 \tag{9.2}$$

と表せる．裸の量と繰り込まれた量の間の変換は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= Z_1 Z_3^{-2} \lambda, \\ m_0^2 &= m^2 - \delta m^2, \\ \chi &= \sqrt{Z_3}\, \varphi. \end{aligned} \tag{9.3}$$

ここで，$Z_1, Z_3, \delta m^2$ は Λ と繰り込まれたパラメータ λ, m の関数である．後で明らかになるように，場そのものの変換も必要である．Z_3 が必要なのはそのためである．(これは理論の正準構造に対する補正とも考えられる.) $Z_1, Z_3, \delta m^2$ といった量は繰り込み定数と呼ばれる．

補正はループ・ダイヤグラムからきているので $\hbar$ で展開でき，次のように表せる．

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \sum_1^\infty \hbar^L Z_1^{(L)}, \\ Z_3 &= 1 + \sum_1^\infty \hbar^L Z_3^{(L)}, \\ \delta m^2 &= \sum_1^\infty \hbar^L (\delta m^2)^{(L)}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

定義により，繰り込まれたパラメータは結合定数や質量の測定値である．よって，それらにさらなる補正はない．これは，ループ計算からくる補正を相殺するように繰り込み定数をとらなければならないことを意味する．したがって，摂動的な計算を行う方針は次のようになる．まず，ラグランジアン (9.2) から出発して正則化を決め，$\Gamma[\Phi]$ を計算する．δm^2, Z_1 および Z_3 を，$\Gamma[\Phi]$ において質量が m^2 となり，Φ^4 相互作用が λ，そして運動エネルギー項の規格化が 1 となるように決める．すると，Λ をどんなに大きくとっても $\Gamma[\Phi]$ に発散する項は含まれない．よって，Λ が十分大きくて $1/\Lambda$ の次数の項が無視できるような状況では，Λ の特定な値は重要ではない．$\Gamma[\Phi]$ にルジャンドル変換 (8.103) を施すと連結グリーン関数の生成母関数 $W[J]$ が計算できる．よって，S 行列はこれから計算できる．(ここで説明したのは 1 つの繰り込み「スキーム」での話である．繰り込まれたパラメータを実験での

測定値に関係づけるとき，Λ によらないパラメータを再定義する自由度が残されており，これは別の「スキーム」をとることに対応する．この問題は次節で簡単に議論する．別のスキームが有用である場合として，例えば，無質量粒子の理論がある．)

つぎに，いままでのアイデアを 4 次の相互作用をもつスカラー場の理論に適用し，1 ループのオーダーで繰り込みの手続きを実行してみよう．この繰り込みの手続きにはこれ以外にもさまざまな特性があり，より多くの議論が必要であるが，それらについてはまた後で考察しよう．

9.2　スカラー場の理論の 1 ループ繰り込み

ここでは真空のファインマン図は考えない．よって，計算できる最も簡単な 1 ループ補正は図 9.1 で与えられる 2 本の外線をもつものである．

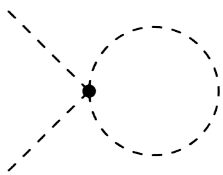


図 9.1　スカラー場の自己エネルギー．

1PI のファインマン図とそれに対応した頂点関数は，式 (5.18) で与えられた S 行列汎関数に対する一般的な表式から得られる．この表式をユークリッド化すると，

$$\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{N} \exp\left(\frac{1}{2}\int G \frac{\delta}{\delta\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp\left[-Z_1\lambda\int\varphi^4\right] \tag{9.5}$$

となる．上のファインマン図に対応する数学的な表式は，結合定数を 1 つ含み，1 つのウィック縮約が取られているはずである．よって，これに対応する表式は

$$\mathcal{F}[\varphi] \approx \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}\int G \frac{\delta}{\delta\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)\left[-Z_1\lambda\int\varphi^4\right]$$

$$= -6Z_1\lambda\mathcal{N}\int d^4x\, G(x,x)\varphi^2(x) \tag{9.6}$$

となる．伝播関数は

$$G(x,y) = \frac{1}{Z_3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2+m^2-\delta m^2} \tag{9.7}$$

で与えられる．この項を計算すると伝播関数から $\hbar$ が 1 つ出てくる．よって，有効作用で $\mathcal{O}(\hbar)$ の項を取り出すためには，伝播関数および式 (9.6) に現れる Z_1, Z_3 と δm^2 に関して $\mathcal{O}(\hbar^0)$ の寄与を考えれば十分である．つまり，右辺で $Z_1 \approx 1$, $Z_3 \approx 1$, $\delta m^2 \approx 0$ としてよい．$\Gamma[\Phi]$ のなかで (9.6) に対応した項は結局

$$\Gamma_2^{(1)} = \left[12\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}\right]\int d^4x\;\frac{1}{2}\Phi^2(x) \tag{9.8}$$

となる．ここに現れているループ運動量 p の積分範囲が無限にまで続いているとすると，この積分は 2 次発散する．そこで，運動量積分が $p^2 \le \Lambda^2$ で切断されていると考えなければならない．このような切断を行えば積分は簡単に評価できる．この積分は 4 次元 p 空間で球対称性をもっていることに注意しよう．よって，p 空間の球座標をもちいて

$$\begin{aligned}\Gamma_2^{(1)} &= \frac{12\lambda}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda^2} ds\,\frac{s}{s+m^2}\int d^4x\,\frac{1}{2}\Phi^2(x)\\ &= \frac{3\lambda}{4\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right]\int d^4x\;\frac{1}{2}\Phi^2(x)\end{aligned} \tag{9.9}$$

と書ける．ここで，

$$\int_{angles} d^4p = 2\pi^2p^3dp = \pi^2 s\,ds \tag{9.10}$$

となることを使った．ただし，$s = p^2$ である．

ここで求めた項を Γ に組み込み，そこから δm^2 を読み取る必要あるが，ここでは，その前に 4 点頂点関数に対する補正も評価しておこう．

φ^4 相互作用に対する 1 ループの補正は図 9.2 のファインマン図で表される．このダイヤグラムの数学的な表式は，λ の 2 次で 2 つのウィック縮約が取られていなければならない．よって，$\mathcal{F}[\varphi]$ のなかで関係ある項は

$$\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{N}\,\frac{1}{2!}\int\frac{1}{2}G\frac{\delta}{\delta\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\int\frac{1}{2}G\frac{\delta}{\delta\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\,\frac{Z_1^2\lambda^2}{2!}\int\varphi^4(x)\int\varphi^4(y)$$

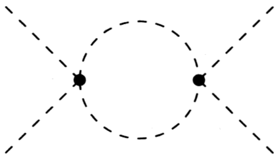


図 9.2　φ^4 相互作用に対する 1 ループ補正.

$$= \mathcal{N}(6\lambda)^2 \int_{x,y} \varphi^2(x) G(x,y)^2 \varphi^2(y) \tag{9.11}$$

である．再び前のダイヤグラムと同様に，各伝播関数から $\hbar$ が現れるのでこれを評価するに際して $Z_1 \approx 1$，$Z_3 \approx 1$，$\delta m^2 \approx 0$ としてよい．

伝播関数に対して (9.7) を使い $Z_1 \approx Z_3 \approx 1$，$\delta m^2 \approx 0$ とおき，変数を書き直すと

$$\Gamma_4^{(1)} = \int d^4x d^4y \, \Phi^2(x) \, V(x,y) \, \Phi^2(y) \tag{9.12}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \, V(k), \\ V(k) &= -(6\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, \frac{1}{(p^2+m^2)[(k-p)^2+m^2]} \end{aligned} \tag{9.13}$$

である．p が大きいときの被積分関数の振る舞いから，この積分は対数的に発散することがわかる．以前と同様に，運動量の切断 Λ を使って $V(k)$ を評価してみよう．ファインマンの積分表示

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dv \frac{1}{[A(1-v)+Bv]^2} \tag{9.14}$$

を使うと，2 つの伝播関数の分母を組み合わせることができ，

$$\begin{aligned} V(k) &= -(6\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{1}{[(p^2+m^2)(1-v)+((k-p)^2+m^2)v]^2} \\ &= -(6\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{1}{[((p-kv)^2+m^2)+k^2v(1-v)]^2} \end{aligned} \tag{9.15}$$

を得る．ここで，$p \to p + kv$ と積分変数をずらすと，この積分は 4 次元 p 空

間で球対称性をもつことがわかる．このずれによる積分領域の変化からくる補正は，運動量 k が Λ に比べて十分小さければ無視できる．この場合，

$$V(k) = -\frac{(6\lambda)^2}{16\pi^2}\int_0^1 dv\int_0^{\Lambda^2} ds\,\frac{s}{[s+k^2v(1-v)+m^2]^2}$$
$$= -\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{k^2v(1-v)+m^2}\right)-1\right] \tag{9.16}$$

となる．ここで再び (9.10) を使った．理論には質量次元をもつパラメータがあるので，この対数部分を分離して次のように書くと便利である．

$$V(k) = V(0) + \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(1+\frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right),$$
$$V(0) = -\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)-1\right]. \tag{9.17}$$

つぎに，繰り込み定数をどう選ぶかを考えよう．Φ^2 と Φ^4 の項に対する 1 ループ補正を取り入れた有効作用は

$$\Gamma = \int Z_3\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2-\delta m^2)\Phi^2\right] + Z_1\lambda\int\Phi^4 + \hbar\Gamma_2^{(1)} + \hbar\Gamma_4^{(1)} + \cdots \tag{9.18}$$

と書ける．Φ^2 に対応する項は，$\hbar$ の 1 次まででは

$$\Gamma_2 = \int\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2\right] + \hbar Z_3^{(1)}\int\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2\right]$$
$$+\hbar\left\{-(\delta m^2)^{(1)} + \frac{3\lambda}{4\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right]\right\}\int\frac{1}{2}\Phi^2 \tag{9.19}$$

で与えられる．運動エネルギー項の規格化が 1 となるという要請から $Z_3^{(1)}=0$ が得られる．質量が m^2 となるように

$$(\delta m^2)^{(1)} = \frac{3\lambda}{4\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] \tag{9.20}$$

と選ぶ．すると，有効作用の Φ^2 の項は

$$\Gamma_2 = \int\frac{1}{2}\left[(\partial\Phi)^2 + m^2\Phi^2\right] \tag{9.21}$$

と書ける．Φ^4 に対応する項は，$\hbar$ の 1 次まででは

$$\Gamma_4 = \lambda\int\Phi^4 + \hbar\left(\lambda Z_1^{(1)} + V(0)\right)\int\Phi^4$$

$$+\hbar\int_{x,y}\Phi^2(x)\left[\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(x-y)}\,V^*(k)\right]\Phi^2(y), \tag{9.22}$$

$$V^*(k)=\left[\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(1+\frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right)\right]$$

となる．繰り込みの基本的な考え方は，有効作用の Λ 依存性が消えるように $Z_1^{(1)}$ を選ぶことである．いまの場合には $\lambda Z_1^{(1)}+V(0)=0$ とすればよい．よって，有効作用の Φ^4 項は

$$\Gamma_4=\lambda\int\Phi^4+\hbar\int_{x,y}\Phi^2(x)\left[\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(x-y)}\,V^*(k)\right]\Phi^2(y) \tag{9.23}$$

となる．$\hbar$ の1次までの範囲では，Z_1 を

$$Z_1=1+\hbar\frac{9\lambda}{4\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)-1\right] \tag{9.24}$$

ととることで Λ 依存性が消去できる．こう選ぶと，有効作用の Φ^4 項は

$$\Gamma_4=\int V(x_1,x_2,x_3,x_4)\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4),$$

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=\int\prod_i\frac{d^4k_i}{(2\pi)^2}e^{ik_i\cdot x_i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i k_i\right)V_4(k_i),$$

$$V_4(k_i)=\lambda+\left[\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(1+\frac{(k_1+k_2)^2v(1-v)}{m^2}\right)\right] \tag{9.25}$$

と書ける．ここまでは，系統的な展開をして繰り込み定数がどのように Λ 依存性を相殺するのかをはっきり見るために，$\hbar$ を残して書いた．ここからは再び $\hbar$ を1とおこう．

Λ 依存する部分と「有限な」部分（つまり $\Lambda\to\infty$ の極限をとったときに有限な部分）をどう分けるのかという不定性が確かに存在する．例えば，(9.17) の対数部分を任意の質量のスケール μ を使って次のように分離することもできる．

$$\begin{aligned}V(k)&=V(0)+\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}+\frac{k^2v(1-v)}{\mu^2}\right),\\ V(0)&=-\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)-1\right]+\cdots.\end{aligned} \tag{9.26}$$

また同様に，Z_1 の選び方にも不定性がある．例えば，$\lambda Z_1^{(1)} + V(0) = c\lambda$ と選ぶこともできる．その結果，$V^*(k)$ と Z_1 は

$$
\begin{aligned}
V^*(k) &= \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(\frac{m^2}{\mu^2} + \frac{k^2 v(1-v)}{\mu^2}\right), \\
Z_1 &= 1 + c + \frac{9\lambda}{4\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1\right] + \cdots
\end{aligned}
\tag{9.27}
$$

となる．c は μ の定義に吸収できることに注意すると，μ に対応するパラメータ1つの不定性が残る．$V^*(k)$ の μ 依存性は，$Z_1^{(1)}$ と $V(0)$ を消し去った後では，繰り込まれた結合定数の意味づけと関係するはずである．結合定数は，相互作用の強さを表す1つの方法であり，散乱実験などで決定できる．測定される量はある入射粒子の運動量を決めたときの散乱振幅である．ある運動量を選び，そこでの散乱振幅から結合定数を決めることができる．他の運動量での散乱振幅はこの定数により特徴づけられる．厳密に言うと，この μ 依存性があるため，繰り込まれた結合定数は $\lambda(\mu)$ と表されなければならない．方程式 (9.22), (9.23), (9.24) をもちいて繰り込み定数を最初に定義した際には，$\mu = m$ と選んでいるので，$k \to 0$ で $V^*(k) \to 0$ となることがわかる．その結果，4点の頂点 V_4 は

$$
V_4(k_1, k_2, k_3, k_4)\Big|_{k_i=0} = \lambda \tag{9.28}
$$

となる．この λ は関係している粒子の運動量をすべてゼロとしたときの4点頂点関数（もしくは自明な運動学的な項を別にすると4粒子散乱振幅）とみなすことができる．これが作用に現れた λ であり，これはさらに $\lambda(m)$ と表すことができる．Z_1 を定義した2つ目の手法では

$$
\begin{aligned}
V_4(k_i)\Big|_{k_i=0} &= \lambda + \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \\
&= \lambda(\mu)
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

となることがわかる．この2つ目の選び方は結合定数の定義を変えたことに対応している．物理量はこういった不定性にはよらないであろう．いまの場合，このことはさまざまな表式をある選ばれた運動量における物理的な振幅を使って書くことで簡単に見て取れる．まず，$V^*(k)$ を

$$
\begin{aligned}
V^*(k) &= \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}+\frac{k^2v(1-v)}{\mu^2}\right)\\
&= \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)+\frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(1+\frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right)
\end{aligned}
\tag{9.30}
$$

と書く．すると V_4 は

$$
V_4(k_i) = V_4(0)+\frac{9V_4(0)^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\,\log\left(1+\frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right)+\cdots \tag{9.31}
$$

と書ける．ここで，$V_4(0)$ は関与する粒子の運動量がゼロのときの $V_4(k_i)$ を表し，$k=k_1+k_2$ である．ここまでの計算の範囲内でだが，$V_4(0)$ を使うことで λ を消去している．式 (9.31) は理論が実際に予言することであり，$V_4(k_i)$ をある決められた運動量（いまの場合は $k_i=0$）での測定値を使って与えている．質量のある理論では $\mu=m$ ととるのが自然で便利な選び方であり，以後 φ^4 理論に対してはこれにならう．

有効作用の低エネルギーや高エネルギーでの振る舞いを調べてみるのは興味深い．頂点での運動量の保存により $k=k_1+k_2$ が成立するので，低エネルギーの散乱過程に対しては $V^*(k)$ を k/m で級数展開して議論することができる．すると，

$$
V^*(k) = \frac{3\lambda^2}{8\pi^2}\frac{k^2}{m^2}+\cdots \tag{9.32}
$$

となる．これを座標空間で表すと，低エネルギーにおける最初の補正項が $(\partial_\mu\varphi^2)(\partial^\mu\varphi^2)$ の形をしていることがわかる．

高エネルギー極限では，

$$
V^*(k) \approx \frac{9\lambda^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \tag{9.33}
$$

となることがわかる．よって，これに対応する散乱振幅は k^2 とともに対数的に増加する．

ここでの計算は繰り込みの手続きがどのようなものであるかを示している．少なくとも Φ^2 や Φ^4 頂点が関係する限りでは，すべての Λ 依存性が完全に消え去り，実験的に測定されるパラメータを使って正しく定義された 1 ループの補正を求めることができた．1 ループの範囲で繰り込みの処方を完成させるには，図 9.3 で与えられる 6 点の頂点などのような高次の頂点についても考察をしなければならない．

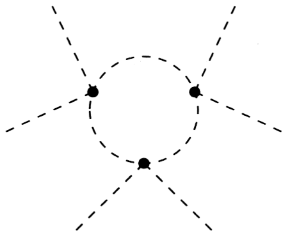


図 **9.3**　6 点頂点関数に対する 1 ループ補正.

このダイヤグラムは 3 つの伝播関数と 1 つのループ運動量 p をもつ．そのため，大きな p での積分は

$$I \sim \int d^4p \frac{1}{p^6} \tag{9.34}$$

と振る舞う．これは Λ が大きいときでも発散しない．この積分は有限な値と $\frac{1}{\Lambda^2}$ のオーダーの項の和で書ける．Φ の高次の頂点についても，同様な積分の値は Λ を大きくしても有限となる．これらの頂点はすべて，これまで以上の制限や新しい繰り込み定数の導入などをせずに計算できる．(そのような頂点の計算はさまざまなタイプの散乱過程について，一意的かつ検証可能な予言を与える.) したがって，この理論の 1 ループでの繰り込みについてはこれで終わりである．

繰り込み定数 Z_3 は 1 ループの範囲では 1 に等しい．Z_3 に対する補正は 2 ループから始まり図 9.4 から生じる．

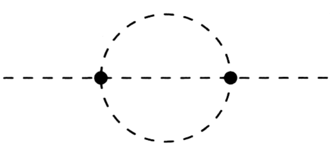


図 **9.4**　2 点関数に対する 2 ループ補正.

このダイヤグラムは質量に対する 2 ループの補正も与える．また，Φ^4 頂点に対する 2 ループの補正は図 9.5 のようなファインマン図から計算できる．こ

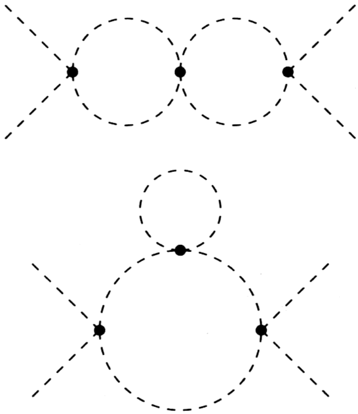


図 9.5　4 点頂点関数に対する 2 ループ補正.

こでは 2 ループまでの系統的な繰り込み定数の計算は行わないが，以下では，$Z_3^{(2)}$ についての補正をどのように計算するのか見てみよう．Φ^2 項に関する 2 ループのファインマン図からの寄与は

$$\Gamma_2^{(2)} = \int_{x,y} \Phi(x)\, V(x,y)\, \Phi(y),$$

$$V(x,y) = -48\lambda^2 G^3(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)}\, V(k), \tag{9.35}$$

$$V(k) = -48\lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2+m^2)(q^2+m^2)[(p+q-k)^2+m^2]}$$

で与えられる．この積分計算は少し面倒であるが，Z_3 を求めるのに必要な項は Λ についての最高次の項であり，これは簡単に得られる．その結果は

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial\Phi(x) \left[\frac{3\lambda^2}{16\pi^4} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \delta^{(4)}(x-y) - F(x,y) \right] \partial\Phi(y),$$

$$F(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \left[\frac{3\lambda^2}{16\pi^4} \log\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \right] \tag{9.36}$$

となる．Γ のなかで $\hbar^2$ のオーダーであり Φ について 2 次の項は

$$\Gamma_2 = Z_3^{(2)} \frac{1}{2} \left[(\partial\Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right]$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x,y}\partial\Phi(x)\left[\frac{3\lambda^2}{16\pi^4}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\delta^{(4)}(x-y)-F(x,y)\right]\partial\Phi(y)+\cdots \tag{9.37}$$

である．質量項に対する 2 ループの補正もあるが，上式ではそれらは省略されている．$\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2$ の項の係数から，Γ が Λ によらないようにするには Z_3 を

$$Z_3 = 1-\frac{3\lambda^2}{16\pi^4}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+\cdots \tag{9.38}$$

と選べばよいことがわかる．

9.3 繰り込まれた有効ポテンシャル

前章では，有効ポテンシャルの 1 ループ補正を計算した．この項を加えた有効作用は

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int Z_3\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2+\frac{1}{2}(m^2-\delta m^2)\Phi^2\right]+Z_1\lambda\Phi^4+F(\Phi),\\ F(\Phi) &= \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\left[24\lambda\Phi^2\left(\Lambda^2+\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right)\right.\\ &\qquad +(12\lambda\Phi^2)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right)\\ &\qquad \left.+\frac{1}{2}(m^2+12\lambda\Phi^2)^2\log\left(1+\frac{12\lambda\Phi^2}{m^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{9.39}$$

である．ただし，ここでは Z 因子と δm^2 の項（カウンター項）も取り入れてある．繰り込みとは，これらのカウンター項を発散が相殺するように選ぶことである．その結果，次のコールマン–ワインバーグ (Coleman–Weinberg) ポテンシャルが得られる．

$$\begin{aligned}\Gamma = \int &\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2+\frac{1}{2}m^2\Phi^2+\lambda\Phi^4\right]\\ &+\frac{1}{64\pi^2}\left[(m^2+12\lambda\Phi^2)^2\log\left(1+\frac{12\lambda\Phi^2}{m^2}\right)-12\lambda m^2\Phi^2-216\lambda^2\Phi^4\right].\end{aligned} \tag{9.40}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= \frac{3\lambda}{2\pi^2}\left(\Lambda^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right) + \cdots , \\ Z_1 &= 1 - \frac{9\lambda}{2\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2}\log(4\Lambda^2/m^2)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{9.41}$$

である．これらの繰り込み定数は (9.20), (9.24) と異なっているが，これは正則化の違いによるものである．そうとはいえ，最も発散している項は (9.41), (9.20) や (9.24) と同じ係数を持つことに注意しよう．

9.4　次数の数え上げ規則

繰り込みの手続きには繰り込み定数を導入して正しくその定数を選ぶことが必要である．そこで，当然次の疑問が湧き起こる．どのような項もしくはファインマン図が発散する可能性があり正則化が必要なのか？ 何個の繰り込み定数が必要なのか？ 1 ループの手続きをどうやったら系統的に高次ループへ拡張できるのか？ これらの問いに対して答えようと思ったら，より系統的に発散する可能性のあるファインマン図を調べる必要がある．発散はループ積分から発生する．伝播関数は，ボソンの場合は高い運動量で $1/k^2$ と振る舞い，フェルミオンの場合は $1/k$ と振る舞うため，積分を収束させる効果がある．ここでループ積分を含むような 1PI のファインマン図に対して，見かけ上の発散の次数 δ を，ループ運動量の正ベキの数から負ベキの数を引いたものとして定義する．言い換えると，各ループ積分は δ に対して $+4$ に寄与し，ループ運動量を変数にもつ伝播関数はそれぞれボソンでは -2，フェルミオンでは -1 と寄与する．この見かけ上の発散の次数は，ループ積分を Λ で紫外切断して評価したときに現れうる Λ の最大ベキを表す．これはどの図形が発散の可能性があるのかを教えてくれる．φ^4 理論において，一般的なファインマン図を考えよう．E_B をボソンの外線の数，I_B をボソンの内線の数とする．V を頂点の数とすると，各頂点は 4 本の足をもつので $E_B = 4V - 2I_B$ が成立する．各伝播関数には $\hbar$ がつき，各頂点には $1/\hbar$ があるので，$\hbar$ の次数はループの数 L に等しく $L - 1 = I_B - V$ となる．1 粒子既約図に対しては，δ は $4L - 2I_B$ で与えられるため

$$\delta = 4(I_B - V + 1) - 2I_B = 4 - E_B \tag{9.42}$$

となる．δ は外線の数だけで決まり，そのため発散する可能性のある図は各ループの次数に対して $E_B \leq 4$ を満たすものだけの有限個しかない．φ^2 項に対する補正は外線が 2 本なので $\delta = 2$ となる．最も強い発散は 2 次の発散である．次の発散として対数発散があり，これは次元解析から外線の運動量を 2 つ含んでいなければならない．これは $(\partial\varphi)^2$ のような項であり $\log \Lambda$ と振る舞う係数をもつ．よって，質量の繰り込みとともに場の繰り込みも必要である．φ^4 に対する補正は $\delta = 0$ のため対数発散に対応し，結合定数の繰り込みに関係する新たな繰り込み定数が必要となる．この理論ではこれで $\delta \geq 0$ となるすべての可能性を尽くしており，もうこれ以上の繰り込みは必要ない．(この理論は $\varphi \to -\varphi$ の対称性をもっており，φ について奇数次の項は摂動計算には現れない.)

見かけ上の発散の次数 δ は対応する場の単項式の次元に関係づけられる．場 φ の次元を次のように決めよう．汎関数積分で指数の肩に入っていることからもわかるように，作用は無次元である．運動項は $\int d^4x(\partial\varphi)^2$ なので座標 x の質量次元を -1 として作用が無次元であることを要請すると，φ の次元は 1 でなければならない．結合定数の次元は作用のすべての項が次元をもたないことから決まる．(あるいは，ラグランジアンの次元を 4 としても同じである.) 有効作用もまた無次元量であり，これから Γ に現れる種々の項の係数の次元が決まる．よって，例えば $\int d^4x\ \varphi^2$ といった項は次元 -2 をもつ．つまり，この項の係数は次元 2 となる．紫外切断 Λ と比べると，これ以外の次元をもつどの項も無視できるので，この項の係数は Λ^2 と振る舞うことが結論づけられる．言い換えると，この項は 2 次の発散をしている．同様に，$\int(\partial\varphi)^2$ のような項の係数は無次元でなければならないので対数発散する．φ^4 項の係数も同じ理由で対数発散する．これらすべてにおいて δ は 4 から含まれている φ の次元を引いたものであることに注意しよう．

この議論は，可能な発散を見つけ出し，必要な繰り込みの種類を明らかにするには役に立つが，見かけ上の発散を調べればすべてが終わりとは言えない．実際の発散の次数は異なることもありえる．次の図 9.6 のように見かけ上の発散が部分的な発散をもつこともある．ループ積分に，もつれ合い

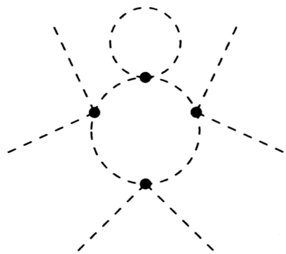


図 9.6　6 点頂点関数に対する 2 ループ補正.

(entanglement) あるいは重複 (overlap) がある場合もある．これはあるループ積分に対して，他のすべてのループ運動量が外線として考えられるような場合に起こる．このとき，ループ積分をどのように実行するかによって，次のループ積分の発散の次数が変わってくることがある．摂動論でこのようなことを取り扱うためには，系統的な帰納的処方を開発して，次元の数え上げ規則に基づき，発散を分離し除去しなければならない．この問題については，この後 QED の 1 ループ繰り込みを考えてから，再度取り上げる．

9.5　QED の 1 ループ繰り込み

QED のユークリッド作用は (8.58) で次のように与えられた．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi) &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu\right) + \bar{\psi}\left(\gamma\cdot(\partial - ieA) + m\right)\psi\right]\\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2 + \bar{\psi}\left(\gamma\cdot(\partial - ieA) + m\right)\psi\right].\end{aligned} \tag{9.43}$$

作用の自由部分から ψ と $\bar{\psi}$ が次元 $\frac{3}{2}$ の場であり，光子の場は次元 1 であることがわかる．相互作用ラグランジアンは次元 4 である．よって，e は次元をもたない．$\mathcal{L}_{int}$ から各頂点には 2 本のフェルミオンと 1 本の光子が入ってくることがわかる．E_F 本のフェルミオンの外線，E_B 本の光子の外線，I_F 本のフェルミオンの内線つまり伝播関数，I_B 本の光子の伝播関数，そして V 個の頂点をもつファインマン図に対して，関係式

$$
\begin{aligned}
E_F &= 2(V - I_F), \\
E_B &= V - 2I_B, \\
L - 1 &= I_F + I_B - V
\end{aligned}
\tag{9.44}
$$

が成立する．見かけ上の発散の次数は

$$
\begin{aligned}
\delta &= 4L - I_F - 2I_B \\
&= 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B
\end{aligned}
\tag{9.45}
$$

で与えられる．この δ はやはり4から関与する場の次元を引いたものになっていることに注意しよう．

よって，$\delta \geq 0$ をみたし発散する可能性のあるファインマン図は，次のものである．

(1) $\delta = 4,\ E_F = E_B = 0$**.**

このような純粋に真空のダイヤグラムは汎関数積分の規格化つまり $\langle 0|0\rangle = 1$ となることを要請することで相殺できる．(もし重力場のような非自明な背景場を考える場合は，外線のない図も重要な意味をもつ．というのも，これらの真空ダイヤグラムを比べることで，異なる背景場にある真空の相対的な寄与の違いを調べることができるからである.)

(2) $\delta = 3,\ E_F = 0,\ E_B = 1$**.**

奇数個の光子の外線をもつダイヤグラムは，QEDのもつ荷電共役不変性のために消える．この対称性については後に議論する．

(3) $\delta = 2,\ E_F = 0,\ E_B = 2$**.**

これらは光子の伝播関数の補正に対応し，真空偏極ダイヤグラム（または光子の自己エネルギー・ダイヤグラム）と呼ばれる．素朴には，この発散の次数は2であり，2次発散を示唆している．しかし，$A_\mu(x)A^\mu(x)$ のような局所的な光子の質量項はローレンツ不変性とゲージ不変性から許されない．その結果，ゲージ不変性とローレンツ不変性をもつ正則化を行えば，このような2次発散は現れないであろう．ゲージ不変でローレンツ不変性をもつ最も次元の低い項は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ であり，次元4をもつ．この係数は次元を持たない

ので，真空偏極は対数発散だけとなることが期待される．

$(\partial\cdot A)^2$ のような項はゲージ不変性を破っているもののゲージ不変な正則化が可能である．これは，これらのダイヤグラムにはフェルミオンのループが含まれており，作用のフェルミオンの部分がゲージ不変性をもつためである．

(4) $\delta=1,\ E_F=0,\ E_B=3.$

これらのダイヤグラムは荷電共役不変性により消える．

(5) $\delta=1,\ E_F=2,\ E_B=0.$

これらはフェルミオンの伝播関数の補正を表し，フェルミオンの自己エネルギー・ダイヤグラムと呼ばれる．素朴には，これらは1次発散しているように見える．しかし，ディラックの γ 行列の性質から実際には対数発散となる．フェルミオンの質量がゼロのとき，理論はいわゆるカイラル対称性をもつ．1次発散する部分は質量項 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ に対応しており，カイラル対称性を保つためにゼロとなる．その結果，質量がある場合でさえも，この項はその係数が質量 m に比例することになる．すると残りの部分は次元ゼロとなり高々，対数発散しかしない．

(6) $\delta=0,\ E_F=0,\ E_B=4.$

この項は光子–光子散乱を記述する．有効作用を考えたとき，最も次元の低い項は $A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu$ であるが，このような項はゲージ不変性から許されない．許される項は $F_{\mu\nu}$ を4つ含む項であり，次元は8となる．つまり係数は次元 -4 となり，そのためゲージ不変な正則化を行えば収束する．

(7) $\delta=0,\ E_F=2,\ E_B=1.$

これは基本的な頂点関数 $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ に対応し，頂点補正と呼ばれる．最終的には電荷の繰り込みの一部を与え，対数発散する．

以上の議論から，QED の繰り込みには3つのタイプのダイヤグラムを考えなければならないことがわかった．つまり，光子とフェルミオンの自己エネルギー・ダイヤグラムと頂点補正のダイヤグラムである．光子の自己エネルギー・ダイヤグラムによる補正は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のような項を与え，その係数は

対数発散している．フェルミオンの自己エネルギーには，$m\bar{\psi}\psi$ や $\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi$ のような項がでてくるが，これらはともに対数発散する係数をもつ．頂点補正も対数発散をして $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ の形の項を与える．そこで，これらの項に対する繰り込み定数を導入する必要がある．これらは作用に入っている項と同じなので，これはラグランジアンの各項の係数に対する補正を与えることになる．

式 (9.43) のパラメータを裸のパラメータと解釈すると，この式は繰り込まれたパラメータを使って

$$\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi) = \int d^4x\left[\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2 + Z_2\bar{\psi}\left(\gamma\cdot\partial + m - \delta m\right)\psi - ieZ_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right] \tag{9.46}$$

と書き換えられる．繰り込み定数 Z_1, Z_2, Z_3, λ, δm は次のように $\hbar$ で展開できる．

$$\begin{aligned} Z_i &= 1 + \sum_1^\infty \hbar^L Z_i^{(L)}, \\ \lambda &= 1 + \sum_1^\infty \hbar^L \lambda^{(L)}, \\ \delta m &= \sum_1^\infty \hbar^L (\delta m)^{(L)}. \end{aligned} \tag{9.47}$$

ただし，$i = 1, 2, 3$ である．

つぎに，$\hbar$ の 1 次のオーダーで，これらの定数の計算を行おう．このためには，電子（フェルミオン）の自己エネルギー，真空偏極そして頂点補正に対する 1 ループからの寄与を評価しなければならない．(以下では，再び $\hbar$ を 1 とおき，有効作用で $\hbar$ の同じオーダーの項をまとめて書くこととする.)

電子自己エネルギー

電子の自己エネルギー・ダイヤグラムは図 9.7 で与えられる．
これによる Γ への寄与は

$$\Gamma^{(1)}_{\bar{\psi}\psi} = e^2\int d^4x d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(k+p)\cdot(x-y)}\frac{1}{k^2}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\frac{1}{m+i\gamma\cdot p}\gamma_\mu\psi(y)$$



図 9.7　電子の自己エネルギー.

$$= \int_{x,y} \bar{\psi}(x)\Sigma(x,y)\psi(y) \tag{9.48}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} \Sigma(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)}\, \Sigma(p), \\ \Sigma(p) &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\left[\gamma^\mu \frac{1}{m+i\gamma\cdot(p-k)}\gamma_\mu\right] \end{aligned} \tag{9.49}$$

である．ここで，式 (9.49) の伝播関数や頂点については $Z_i \approx 1$, $\lambda \approx 1$, $\delta m \approx 0$ とおいた．これは，1 ループの計算ではそれらの補正は高次補正となるためである．式 (9.14) を使って分母をまとめ積分変数をシフトさせると，

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = e^2 \int_0^1 dv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Bigg[&\frac{2m(1+v)}{[q^2+p^2v(1-v)+m^2v]^2} \\ &+ (m+i\gamma\cdot p)\,\frac{2(1-v)}{[q^2+p^2v(1-v)+m^2v]^2}\Bigg] \end{aligned} \tag{9.50}$$

が得られる．(以前と同様に積分変数のシフトは，紫外切断 Λ がずらした運動量 p に比べて十分大きい場合はほとんど影響を与えない.) この積分は実際に評価できて

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{[q^2+p^2v(1-v)+m^2v]^2} = \frac{1}{16\pi^2}\Bigg[&\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - (1+2\log v) \\ &+ \log\left(\frac{m^2v^2}{m^2v^2+Kv(1-v)}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{9.51}$$

となる．ただし，$K = p^2 + m^2$ である．よって，自己エネルギーの寄与は

$$\Sigma(p) = \Sigma_1 + (m+i\gamma\cdot p)\Sigma_2 + \Sigma^*,$$

$$\Sigma_1 = \frac{3\alpha m}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha m}{2\pi},$$

$$\Sigma_2 = \left[\frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha}{2\pi}\right],$$

$$\Sigma^* = -\frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 dv\,(1+v)\log\left(\frac{m^2v^2 + K\,v(1-v)}{m^2v^2}\right),$$

$$-(m+i\gamma\cdot p)\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dv\,(1-v)\log\left(\frac{m^2v^2+Kv(1-v)}{m^2v^2}\right) \quad (9.52)$$

となる．ここで，$\alpha = e^2/4\pi$ は微細構造定数である．質量 m の自由電子に対して，K はミンコフスキー空間へ解析接続するとゼロであることに注意しよう．よって，最後の項 Σ^* は自由電子の場合ゼロとなる．このため，Γ に対する寄与は

$$\Gamma^{(1)}_{\bar{\psi}\psi} = \int_x \left[\Sigma_1\,\bar{\psi}\psi + \Sigma_2\,\bar{\psi}(\gamma\cdot\partial + m)\psi\right] + \int_{x,y}\bar{\psi}(x)\Sigma^*(x,y)\psi(y) \quad (9.53)$$

と表される．

真空偏極

真空偏極つまり光子の自己エネルギーは図 9.8 で与えられる．

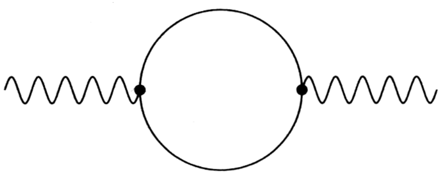


図 9.8 真空偏極（光子の自己エネルギー）．

この図を数学的に表すと，

$$\Gamma^{(1)}_{AA} = \frac{1}{2}\int_{x,y} A^\mu(x)\Pi_{\mu\nu}(x,y)A^\nu(y),$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{ik\cdot(x-y)}\,\Pi_{\mu\nu}(k), \quad (9.54)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(m-i\gamma\cdot(p+k))\gamma_\nu(m-i\gamma\cdot p)\right]}{(p^2+m^2)[(p+k)^2+m^2]}$$

となる．この式を計算する際に問題となるのが紫外発散の切断（カットオフ）の問題である．Γ_{AA} において Λ についての最高次の項は $\Lambda^2 A^\mu(x)A_\mu(x)$ という形をしており，これはゲージ不変でない光子の質量項を与える．この項が現れる理由は，運動量積分の範囲を制限するカットオフがゲージ不変ではないことによる．よって，1つの対処法として，単に運動量の範囲に制限を与えるカットオフではなく，もう少し洗練されたゲージ不変な正則化を導入すればよい．解析接続をもちいて $(4-\epsilon)$ 次元 $(\epsilon \ll 1)$ の時空で理論を定義する次元正則化はそのような正則化の1つである．この場合，理論の発散は ϵ の極として分離できる．この極を繰り込み定数で相殺させてから $\epsilon \to 0$ の極限をとればよい．この手法ではゲージ不変性は常に保たれている．もう1つのより単純な対処法として，繰り込み定数をもう1つ導入する手法がある．つまり，出発点となるラグランジアンに $\frac{1}{2}\delta\mu^2 A^2$ という項を追加する手法である．紫外切断の手続きは，真空偏極により生成される $\Lambda^2 A^2$ の項を保ちながら行われ，最終的に Γ がゲージ不変性を保つように $\delta\mu^2$ を選べばよい．これは，実際には (9.54) の $\Pi_{\mu\nu}$ においてゲージ不変でない部分を落とすことに相当する．以下では，この手法に従おう．（フェルミオンの作用はゲージ不変であるので，このダイヤグラムの計算においてゲージ不変性を要請することに何ら矛盾はない．）

ゲージ不変性から，理論は変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$ のもとで不変であることが要請される．ここで，θ は時空間変数の関数である．もし $\Pi_{\mu\nu}$ が $k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$ をみたしている（つまり $\Pi_{\mu\nu}$ が k^μ と直交している）のであれば，真空偏極への寄与に対してもゲージ対称性が成立していることになる．したがって，$\Pi_{\mu\nu}$ の横波成分を分離し，そうでない部分をゼロとおいてから，紫外切断をもちいて積分を実行すればよい．(9.54) の γ 行列のトレースをとって分母をまとめると，

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -4e^2 \int_0^1 dv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 + \frac{1}{2}q^2)\delta_{\mu\nu} + v(1-v)(2k_\mu k_\nu - k^2\delta_{\mu\nu})}{[q^2 + m^2 + k^2 v(1-v)]^2} \tag{9.55}$$

と表せる．ここで，$q = p + kv$ とし，また積分変数をシフトさせた．q に関して奇関数の部分は角度積分によりゼロとなるので落とした．また，$q_\mu q_\nu$ の積分が $\delta_{\mu\nu}$ に比例すること，つまり q^2 の関数に対して

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} F(q^2)\, q_\mu q_\nu = \frac{\delta_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} F(q^2) q^2 \tag{9.56}$$

となることを使った．$\Pi_{\mu\nu}$ の横波成分は

$$\begin{aligned}\Pi^T_{\mu\nu}(k) &= \Pi_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\frac{k^\alpha k^\beta \Pi_{\alpha\beta}}{k^2} \\ &= (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\, 8e^2 \int_0^1 dv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{v(1-v)}{[q^2+m^2+k^2v(1-v)]^2}\end{aligned} \tag{9.57}$$

で与えられる．この積分は簡単に実行でき，

$$\begin{aligned}\Pi^T_{\mu\nu}(k) = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\Biggl[&\frac{\alpha}{3\pi}\left(\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1\right) \\ &- \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\, v(1-v)\log\left(1 + \frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right)\Biggr]\end{aligned} \tag{9.58}$$

となる．この式を使うと，Γ への寄与は

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}_{AA} = &\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left[\frac{\alpha}{3\pi}\left(\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1\right)\right] \\ &+ \frac{1}{4}\int_{x,y} F_{\mu\nu}(x)\left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)}\Pi^*(k)\right] F^{\mu\nu}(y)\end{aligned} \tag{9.59}$$

となる．ただし，

$$\Pi^*(k) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\, v(1-v)\, \log\left(1 + \frac{k^2v(1-v)}{m^2}\right) \tag{9.60}$$

である．

頂点関数の補正

頂点関数の補正は図 9.9 で表される．よって，Γ への寄与は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}_{\bar\psi A\psi} &= -ie\int \bar\psi(x)\Gamma_\mu(x,z,y)A^\mu(z)\psi(y), \\ \Gamma_\mu(x,z,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot y}e^{-i(p-p')\cdot z}\,\Gamma_\mu(p,p'), \\ \Gamma_\mu(p,p') &= -e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\alpha[m - i\gamma\cdot(p-k)]\gamma_\mu[m - i\gamma\cdot(p'-k)]\gamma^\alpha}{k^2[(p-k)^2+m^2][(p'-k)^2+m^2]}.\end{aligned} \tag{9.61}$$

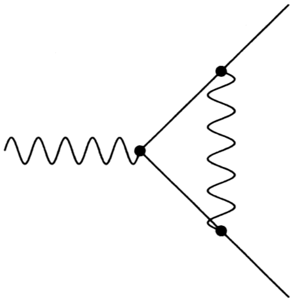


図 **9.9**　1 ループの頂点補正.

(9.61) において Λ についての最高次の項のみを計算しよう．そのためには，k の値が大きな部分が重要となるので，外線の運動量 p, p' は k に比べて小さい値にとることができる．よって，

$$\Gamma_\mu \approx e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\alpha \gamma \cdot k \gamma_\mu \gamma \cdot k \gamma^\alpha}{k^2(k^2+m^2)^2} \tag{9.62}$$

と近似できる．ディラックの γ 行列のみたす代数を使うと $\gamma_\alpha \gamma \cdot k \gamma_\mu \gamma \cdot k \gamma^\alpha = 2\gamma_\mu k^2 - 4k_\mu k_\nu \gamma^\nu$ がわかる．さらに，積分には k^2 しか入っていないので，(9.56) を使うことができる．よって，Γ_μ に対する式 (9.62) は

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \gamma_\mu e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} + \cdots \\ &= \gamma_\mu \frac{\alpha}{4\pi} \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1 \right] + \cdots \\ &\approx \gamma_\mu \frac{\alpha}{4\pi} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{9.63}$$

となる．したがって，Γ のなかで $\bar{\psi} A \psi$ 頂点において Λ に依存する部分は

$$\Gamma^{(1)}_{\bar{\psi}A\psi} = -ie \int \bar{\psi} \gamma \cdot A \psi \left[\frac{\alpha}{4\pi} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \tag{9.64}$$

となる．

ここで，これまでの結果をまとめておこう．$\hbar$ の 1 次のオーダーで有効作用は

$$
\begin{aligned}
\Gamma = & \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m)\psi - ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \\
& + \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left[Z_3^{(1)} + \frac{\alpha}{3\pi}\left(\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1\right)\right] + \lambda^{(1)} \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \\
& + \left[Z_2^{(1)} + \frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha}{2\pi}\right] \bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m)\psi \\
& - \left[\delta m^{(1)} - \frac{3\alpha m}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\alpha m}{2\pi}\right] \bar{\psi}\psi \\
& - \left[Z_1^{(1)} + \frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \\
& + (\Lambda \text{によらない項}) + \cdots
\end{aligned}
\tag{9.65}
$$

となる．繰り込み定数を次のようにとると，Λ に依存する部分は物理的なパラメータの定義に吸収できる．

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \cdots , \\
Z_2 &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\alpha}{2\pi} + \cdots , \\
Z_3 &= 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1\right] + \cdots , \\
\delta m &= \frac{3\alpha m}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha m}{2\pi} + \cdots , \\
\lambda &= 1 + \cdots .
\end{aligned}
\tag{9.66}
$$

ただし，省略記号 $\cdots$ は $\hbar^2$ のオーダーの項を表す．$\hbar$ の 1 次のオーダーの範囲内で，最終的な Γ は

$$
\begin{aligned}
\Gamma = & \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m)\psi - ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \right) \\
& + \int \bar{\psi}\Sigma^* \psi + \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}\Pi^* F^{\mu\nu} - ie\int \bar{\psi}\Gamma^*_{\mu} A^{\mu}\psi + \cdots
\end{aligned}
\tag{9.67}
$$

となる．ただし，Σ^* は (9.52) で，Π^* は (9.60) で与えられる．また，Γ^*_{μ} は (9.61) の Γ_{μ} における有限かつ Λ に依存しない部分を表す．ここでは Γ^*_{μ} を具体的に計算はしなかったが，実際にこれは Γ のなかに現れる．さらに，ここでは考えなかったが，より多くの外線をもつ 1 粒子既約な頂点図も存在す

る．ただし，これらは $\Lambda \to \infty$ で収束するので繰り込み定数の決定には影響しない．

有限補正の項である Σ^* と Π^* は，場が正しい質量をもつ自由場の運動方程式をみたすとゼロになる．つまり，電子に対しては $i\gamma \cdot p + m = 0$，光子に対しては $k^2 = 0$ である．ここでの摂動展開では，これらの補正は自由粒子の伝播関数に影響を与えない．しかし，束縛された電子に関してはこれらの有限補正はゼロとなる必要はなく，実際に例えばラム (Lamb) シフトのような観測可能な効果を与える．

これまで計算してきたオーダーでは

$$Z_1 = Z_2 \tag{9.68}$$

が成り立っていることにも注意しよう．ここでは頂点補正を Λ についての最高次のオーダーでしか計算していないので，ここでの比較は Z_2 の Λ に依存する部分だけをもちいて行われている．関係式 (9.68) はゲージ不変性の帰結でありウォード–高橋 (WT) 恒等式の一例となっている．これは物理的な（つまり繰り込まれた）電荷 e を含むゲージ変換に対するゲージ不変性を与える．式 (9.68) や他の関係する恒等式については後で導出する．

真空偏極についての補足

つぎに，光子の伝播関数つまり真空偏極の効果に対する有限補正項 (9.60) を変形してみよう．まず最初に k^2 がとても大きな場合（つまり $k^2 \gg m^2$ となる場合）を考える．この場合は Π^* を

$$\Pi^*(k) \approx -\frac{\alpha}{3\pi} \log\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \tag{9.69}$$

と近似できる．外場のカレント J_μ があるときの Γ に対する運動方程式を使うと，相互作用項は

$$\begin{aligned} W_2[J] &= \frac{1}{2}\int J_\mu(x)\, D(x,y)\, J^\mu(y), \\ D^{-1}(k) &= k^2\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{k^2}{m^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{9.70}$$

となることがわかる．この相互作用は k^2 の値が大きいときつまり短距離で

支配的になることがわかる．よって，真空偏極の効果は電荷を遮蔽する効果がある．また，QED の真の展開パラメータは $\alpha \log(k^2/m^2)$ であり，単に α でないこともわかる．公式 (9.70) は $D(k)$ が $k^2 = m^2 \exp(3\pi/\alpha)$ で極をもつことを示している．これはランダウの極 (Landau pole) と呼ばれる．明らかに摂動論はこのエネルギー・スケールに近づくと正当性を失い，ここの計算から得られた極についてはっきりとしたことは何も導けない．この極の存在からせいぜい言えることは，摂動的な QED はこのエネルギー・スケールよりもはるかに低いところで正当化される有効理論と考えるべきだということである．

k に依存する有効電荷を

$$\alpha_{eff}(k) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(k^2/m^2\right)} \tag{9.71}$$

と定義すると，(9.70) の第 2 式は $\alpha D(k) = \alpha_{eff}(k)/k^2$ の形と表すこともできる．

つぎに，真空偏極の低エネルギー極限を考えよう．これは k の典型的な値が電子質量 ($m_e \approx 0.51\,\mathrm{MeV}$) よりもずっと小さく電子ボルト (eV) 程度の値をとるような原子の系において重要である．Π^* の対数部分を展開すると

$$D(k) \approx \frac{1}{k^2\left[1 - (\alpha k^2/15\pi m^2)\right]} \approx \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{9.72}$$

となることがわかる．2 つの電荷の相互作用はこの第 2 項によって変更を受ける．例えば，電子と電荷 Ze の原子核との静電相互作用は

$$V(r) = -Ze^2\left[\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{15\pi m^2}\,\delta^{(3)}(r)\right] \tag{9.73}$$

と与えられる．通常のクーロン相互作用に対するこの補正項は，エーリング (Uehling) ポテンシャルとして知られている．これは原子のエネルギー準位に変位を与える．実際，この効果は観測されており，特に水素原子のラムシフトにおけるこの効果の寄与は $-27\,\mathrm{MHz}$ であることが知られている．

ラムシフト

水素様原子における $2S_{\frac{1}{2}}$ 状態と $2P_{\frac{1}{2}}$ 状態のエネルギー準位の分離はラムシフトと呼ばれる．水素原子についての最近の実験結果は，ランディー

ン (Lundeen) とピプキン (Pipkin) のグループ (LP) およびアンドリュース (Andrews) とニュートン (Newton) のグループ (AN) により与えられており，それらは

$$E(2S_{\frac{1}{2}}) - E(2P_{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} 1057.893 \pm 0.020\,\mathrm{MHz} & \text{(LP)} \\ 1057.862 \pm 0.020\,\mathrm{MHz} & \text{(AN)} \end{cases} \tag{9.74}$$

である．この効果に対して，理論的にはさまざまな寄与がある．最も主要な寄与は電子の自己エネルギーによるものである．自由電子に対しては有限補正 Σ^* はゼロとなるが，束縛状態の伝播関数を使って計算された Σ^* (束縛) はゼロではなく束縛状態のエネルギー準位のずれを与える．この自己エネルギーの補正を α^2 のオーダーまで計算し，電子の異常磁気モーメントからくる寄与，原子核の有限サイズの影響，核の反跳効果，そして前述のエーリング補正を取り入れることで理論の予測値が計算できる．その結果は

$$E(2S_{\frac{1}{2}}) - E(2P_{\frac{1}{2}}) = 1057.864 \pm 0.014\,\mathrm{MHz} \tag{9.75}$$

となり実験結果と見事に一致している．これは，自己エネルギーと真空偏極の効果が検証されたことを意味している．

電子の異常磁気モーメント

ここでは計算しなかったが，頂点補正の有限部分は電子の異常磁気モーメントを予言する．これは (9.61) で $[\gamma_\mu, \gamma_\nu](p-p')^\nu$ に比例する部分を分離して十分に低い外線の運動量の極限をとることで得られる．その結果は有効作用では $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi\, F^{\mu\nu}$ の項として表される．これは磁気モーメントの相互作用の形をしており，電子の磁気回転比 (gyromagnetic ratio) のずれ $g \to 2(1+\alpha/2\pi)$ として表される．すなわち，この理論は電子の磁気回転比が 1 粒子ディラック方程式が与える 2 ではなく異常磁気モーメントをもつことを予言する．高次の効果（$\mathcal{O}(\alpha^3)$ 補正までを）取り入れると，この値は

$$\frac{g-2}{2} = \begin{cases} (1\ 159\ 652\ 140(5.3)(4.1)(27.1)) \times 10^{-12} & :\text{理論} \\ (1\ 159\ 652\ 188.4(4.3) \pm 200) \times 10^{-12} & :\text{実験} \end{cases} \tag{9.76}$$

となる．ここで，括弧のなかの数字はさまざまな要因による最後の数桁の誤差を表している．この異常磁気モーメントは量子電磁力学の予測のなかで最

も精密に検証されているものの 1 つである.

9.6　高次の繰り込み

これまで見てきた 1 ループの計算からわかったことは, 作用 (9.46), つまり

$$\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi)=\int d^4x\left[\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2+Z_2\bar{\psi}\,(\gamma\cdot\partial+m-\delta m)\,\psi\right.$$
$$\left.-\,ieZ_1\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\right]\qquad(9.77)$$

から始めて, (9.66) にあるように繰り込み定数を選ぶと, 紫外切断 Λ が考えている運動量スケールよりも十分に大きい場合には, 有効作用 Γ は Λ によらないということであった. これが 1 ループの繰り込みの手続きである. 以下では, この手続きがどのように $\hbar$ の高次の項にまで拡張されるのかを示そう.

まず, 上記の作用を次のように書き換えよう.

$$\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi)=\mathcal{S}_{cl}(A,\bar{\psi},\psi)+\mathcal{S}_C(A,\bar{\psi},\psi).\qquad(9.78)$$

ただし,

$$\mathcal{S}_{cl}(A,\bar{\psi},\psi)$$
$$=\int d^4x\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2+\bar{\psi}\,(\gamma\cdot\partial+m)\,\psi-ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\right],$$
$$\mathcal{S}_C(A,\bar{\psi},\psi)$$
$$=\int d^4x\left[\frac{Z_3-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\lambda-1}{2}(\partial\cdot A)^2+(Z_2-1)\bar{\psi}\,(\gamma\cdot\partial+m)\,\psi\right.$$
$$\left.-\,Z_2\delta m\bar{\psi}\psi-ie(Z_1-1)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\right]\qquad(9.79)$$

である. $\mathcal{S}_C$ はカウンター項 (相殺項) と呼ばれるものの和である. カウンター項は Λ に依存しているが, ループ補正により有効作用では相殺される.

これまで見てきたように, L ループまでの補正を計算するためには, $\hbar$ について 1 次低い次数 (つまり $\hbar^{L-1}$ の次数) までの繰り込み定数 (あるいは

カウンター項）が必要であった．L 次のオーダーで計算されたループ補正から，繰り込み定数を L 次のオーダーで決めることができ，その結果はさらにもう1次高い次数の計算に利用できる．つまり，再帰的に繰り込みの手続きが実行できる．被積分関数は外線の運動量の級数あるいはこれらの組み合わせ（p^2+m^2 や $i\gamma\cdot p+m$ といった質量殻の量など）で展開することができる．このなかで見かけの発散の次数 δ までの最初の次数に対応する数項が，Λ に依存する量となる．残りの項は，Λ を十分大きくとると有限となる．

この手続きを別の視点から見ることもできる．カウンター項を使って発散を相殺するという立場をとる代わりに，式 (9.79) のカウンター項の入っていない作用 $\mathcal{S}_{cl}$ を使い，繰り込まれた被積分関数と呼ばれる新しい被積分関数を定義して同じループ計算をすることができる．繰り込まれた被積分関数は，ループ積分を実行する際にそれ以上に新しい発散がでないように定義される．すなわち，$\mathcal{S}_{cl}$ から作られる 1PI のファインマン図 G に対する被積分関数 $\mathcal{I}_G$ が与えられたとき，これを繰り込まれた被積分関数 R_G で置き換え，ループ積分を実行する．ここで $\mathcal{I}_G$ が与えられたときに R_G を書き出す方法を与えなければならない．このなかには $\mathcal{I}_G$ からある種の項を取り除く作業が含まれる．カウンター項の方法との比較で言えば，この取り除くべき項はカウンター項による寄与とみなすことができる．このような繰り込みの手法はボゴリューボフ (Bogoliubov)，パラシューク (Parasiuk)，ヘップ (Hepp)，ツィマーマン (Zimmerman) の名前をとって，BPHZ の方法と呼ばれている．

ファインマン図 G には，G 自身に見かけ上の発散がなくても発散する部分図（部分ダイヤグラム）を含むことがある．9.4 節の最後では，その具体例をスカラー場の理論でみた．（カウンター項の方法では，部分図の発散の一部は低い次数のカウンター項で相殺される．）ここで，Γ において，場についてのある特定な単項式で表される項に注目しよう．$\bar{R}_G$ をこの項に対応するあるループ次数での被積分関数とし，それより低いすべての次数の部分図による発散は取り除かれているものとする．部分図の発散がないので，$\bar{R}_G$ に現れる唯一の発散はダイヤグラム全体からくるもの，つまり $\delta_G \geq 0$ の場合にだけ起こりうる．したがって，もし $\delta_G < 0$ であれば，繰り込まれた被積分関数 R_G を

$$R_G = \bar{R}_G \quad (\delta_G < 0) \tag{9.80}$$

と定義できる．また，$\delta_G \geq 0$ の場合には，外線の運動量（または質量殻の量）によるテイラー展開を行って，

$$R_G = \bar{R}_G - T_G \bar{R}_G = (1 - T_G)\,\bar{R}_G \quad (\delta_G \geq 0) \tag{9.81}$$

と定義する．ここで，T_G は $\bar{R}_G$ を外線の運動量（または質量殻の量）のベキで δ_G の次数までテイラー展開したものである．(カウンター項の方法との比較で言えば，$T_G \bar{R}_G$ は計算している次数に対応する繰り込み定数またはカウンター項を与える.)

つぎに，$\mathcal{I}_G$ から $\bar{R}_G$ を構成しなければならない．$\mathcal{I}_G$ が発散する部分図 γ をもつとしよう．このとき，$\mathcal{I}_G = \mathcal{I}_{G/\gamma}\mathcal{I}_\gamma$ と表せる．カウンター項の寄与は γ に対しては $-T_\gamma \bar{R}_\gamma$ となるので，G に対しては $\mathcal{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma \bar{R}_\gamma)$ となる．γ_1 と γ_2 を繰り込みをもつ重ならない部分図（共通の内線や頂点をもたない図のこと）としよう．この場合，発散する可能性のある部分は次のように分離できる．

$$\mathcal{I}_{G/\{\gamma_1,\gamma_2\}}(-T_{\gamma_1}\bar{R}_{\gamma_1})(-T_{\gamma_2}\bar{R}_{\gamma_2}). \tag{9.82}$$

部分図が重なっている場合は，上のようにカウンター項の寄与を書くことができない．例えば，図 9.10 のダイヤグラムでは Z_1 のカウンター項の寄与をもつ，あるいは図 9.11 のダイヤグラムにあるような低次の発散の除去をもつ．図 9.11 の **X** は 1 ループの頂点に対するカウンター項を示している．これに対応する数学的な表式は $T_{\gamma_1}\bar{R}_{\gamma_1} + T_{\gamma_2}\bar{R}_{\gamma_2}$ と書ける．ただし，γ_1 と γ_2 は図 9.12 に図示してあるとおりである．この表式は明らかに (9.82) の形をしていない．

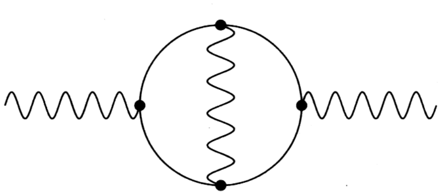


図 9.10　真空偏極に対する 2 ループ補正．

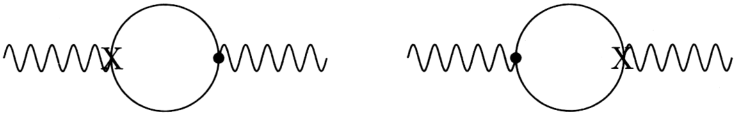


図 9.11　$\mathcal{O}(\hbar^2)$ の真空偏極を計算する際の Z_1 カウンター項からの寄与.

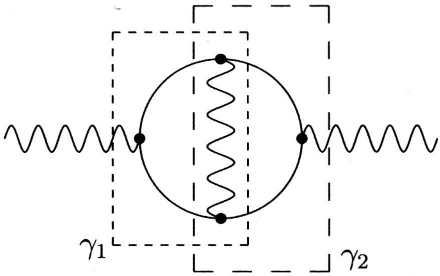


図 9.12　2 ループ真空偏極の部分ダイアグラム.

重ならない部分図に対しては，(9.82) の操作をくり返し行うことができる．すべての低次の部分発散をこの方法で除去すれば $\bar{R}_G$ が得られる．よって，

$$\bar{R}_G = \mathcal{I}_G + \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots} \mathcal{I}_{G/\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots\}} \prod_i (-T_{\gamma_i}\bar{R}_{\gamma_i}) \tag{9.83}$$

となる．これはボゴリューボフの再帰公式 (recursion formula) と呼ばれる．ここで，和はすべての重ならない部分図の族つまり $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ を満たすものについてとられる．(9.83) と (9.81) から，R_G が求まる．この公式がどのように使われるかを示す例として，図 9.13 の 2 ループ頂点補正を考えてみよう．重ならない部分図の族は γ（と何も含まない図と全体の図 G）である．再帰公式より

$$\begin{aligned}\bar{R}_G &= \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma \bar{R}_\gamma) = \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma \mathcal{I}_\gamma) \\ &= (1 - T_\gamma)\mathcal{I}_G, \\ R_G &= (1 - T_G)(1 - T_\gamma)\mathcal{I}_G \end{aligned} \tag{9.84}$$

となる．ここで，$\bar{R}_\gamma = \mathcal{I}_\gamma$ を使った．これは 1 ループではそれより前の次数に発散がないからである．

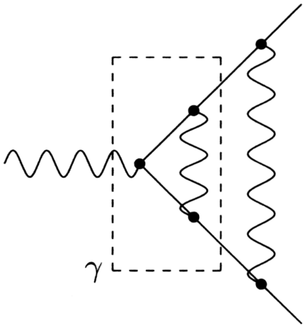


図 9.13 2 ループ頂点補正へ寄与するダイヤグラム.

もう 1 つの例として，再度，真空偏極に対する 2 ループの補正を考えよう．この場合には，重ならない部分図の族は γ_1 と γ_2 にそれぞれ何も含まない図 $\emptyset$ と全体図を加えたものである．よって，

$$\begin{aligned}\bar{R}_G &= \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G/\gamma_1}(-T_{\gamma_1}\bar{R}_{\gamma_1}) + \mathcal{I}_{G/\gamma_2}(-T_{\gamma_2}\bar{R}_{\gamma_2}) \\ &= (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2})\mathcal{I}_G \end{aligned} \tag{9.85}$$

が得られる．ここで再び $\bar{R}_{\gamma_1} = \mathcal{I}_{\gamma_1}$ と $\bar{R}_{\gamma_2} = \mathcal{I}_{\gamma_2}$ が成立する．よって，繰り込まれた被積分関数は

$$R_G = (1 - T_G)(1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2})\mathcal{I}_G \tag{9.86}$$

となる．ここで，$R_G \neq (1-T_G)(1-T_{\gamma_1})(1-T_{\gamma_2})\mathcal{I}_G$ であることに注意しよう．これは 2 ループの積分に重なりがあるためである．

これらの公式には再帰的な関係性がある．つまり，まず $\bar{R}_{\gamma_i}$ を決め，次に (9.83) を使って $\bar{R}_G$ を求めることができる．$\mathcal{I}_G$ による (9.83) と (9.81) の解はツィマーマンにより与えられた．これは，森公式 (forest formula) と呼ばれている．ここで，森 $\cup$ とは次の性質をもつ部分図の族で定義されるものである．

1. $\gamma_i \in \cup$ は見かけ上の発散をもつ図である．
2. $\gamma_1, \gamma_2 \in \cup \Longrightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2$ または $\gamma_2 \subset \gamma_1$ または $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. つまり，こ

れらは重なりがないか，または一方がもう一方に含まれている．

3. $\cup$ は空集合でもよい．

これらより，(9.81) と (9.83) の解は

$$R_G = \sum_{\cup} \prod_{\gamma \in \cup} (-T_\gamma) \mathcal{I}_G \tag{9.87}$$

で与えられる．これがツィマーマンの森公式である．

この公式を2ループ頂点の図へ応用してみよう．森は $\emptyset$, $\{\gamma\}$, $\{G\}$, $\{\gamma, G\}$ で与えられる．よって，森公式から

$$\begin{aligned} R_G &= \mathcal{I}_G - T_\gamma \mathcal{I}_G - T_G \mathcal{I}_G + T_\gamma T_G \mathcal{I}_G \\ &= (1 - T_G)(1 - T_\gamma) \mathcal{I}_G \end{aligned} \tag{9.88}$$

となり，これは式 (9.84) と一致する．同様に，2ループの真空偏極ダイヤグラムに対して森は $\emptyset$, $\{G\}$, $\{\gamma_1\}$, $\{\gamma_2\}$, $\{\gamma_1, G\}$, $\{\gamma_2, G\}$ で与えられる．この場合も森公式から

$$\begin{aligned} R_G &= (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2} - T_G + T_{\gamma_1} T_G + T_{\gamma_2} T_G) \mathcal{I}_G \\ &= (1 - T_G)(1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}) \mathcal{I}_G \end{aligned} \tag{9.89}$$

となり，やはり式 (9.86) と一致する．

9.7　カウンター項と繰り込み可能性

つぎに，QEDの繰り込み可能性の議論に移ろう．ある場の理論が繰り込み可能であるとは，繰り込みの手続きが実行できて，有限個の決まらないパラメータ（質量や結合定数）を使って有限な有効作用 Γ が定義できることをいう．これらのパラメータは実験で決定することができる．もし Γ が無限個の決定できないパラメータを含むのであれば，この理論は繰り込み不可能である．QEDは繰り込み可能な理論である．

ループ計算を実行するため，QEDの作用を (9.78) のように書いた．つまり，

$$\mathcal{S}_E(A, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{S}_{cl}(A, \bar{\psi}, \psi) + \mathcal{S}_C(A, \bar{\psi}, \psi) \tag{9.90}$$

と表せる．ただし，

$$\mathcal{S}_{cl}(A,\bar{\psi},\psi)=$$
$$\int d^4x\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2+\bar{\psi}\,(\gamma\cdot\partial+m)\,\psi-ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\right],$$
$$\mathcal{S}_{C}(A,\bar{\psi},\psi)=$$
$$\int d^4x\left[\frac{Z_3-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\lambda-1}{2}(\partial\cdot A)^2+(Z_2-1)\bar{\psi}\,(\gamma\cdot\partial+m)\,\psi\right.$$
$$\left.-Z_2\delta m\bar{\psi}\psi-ie(Z_1-1)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\right] \tag{9.91}$$

であった．$\mathcal{S}_C$ はカウンター項の作用を表す．理論を繰り込む際には，発散を相殺して有限な有効作用 Γ が得られるようにカウンター項を選ぶ．このカウンター項は，$\Lambda\to\infty$ で発散が除去されるような正則化された積分計算によって決めることができる．その結果，次のような特性が導かれる．

> 正則化で保たれる対称性を古典論がもつ場合，カウンター項の作用（したがって，その汎関数積分）も同じ対称性をもつ．

このような対称性の一例として，QED のゲージ不変性がある．古典作用は次のゲージ不変性をもつ．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{cl}(A',\bar{\psi}',\psi')&=\mathcal{S}_{cl}(A,\bar{\psi},\psi),\\ A'_{\mu}&=A_{\mu}+\partial_{\mu}\theta,\\ \psi'&=e^{ie\theta}\psi,\\ \bar{\psi}'&=e^{-ie\theta}\bar{\psi}.\end{aligned} \tag{9.92}$$

ゲージ不変な正則化を行えば，$\mathcal{S}_C$ も同じ対称性をもつと期待される．これよりすぐに，$Z_1=Z_2$ が得られる．よって，ゲージ不変な正則化を使うと $\mathcal{S}_C$ が式 (9.91) の形で Z_1 を Z_2 と等しくしたものに制限できる．(汎関数積分は $\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2$ という項をもっており，この項は明らかにゲージ不変ではない．しかし，A_μ は保存カレントに結合しているため，これは上の議論に影響しない．このことは 11 章でウォード–高橋恒等式を議論するとよりはっきりするであろう.）

選ぶべきカウンター項は，場やその微分に関して，作用に現れる項と同じ

構造をもっている．これは次のように理解できる．場とその微分の関数で $\mathcal{O}$ という形をした項があり，この項は（ある次数までで）ループ計算をすると $c(\Lambda)$ という発散する係数で表せると仮定しよう．すると，この発散する部分を相殺するために作用には $Z\mathcal{O}$ という項を付け加えなければならない．両者を加えると有効作用は $(Z+c)\mathcal{O}$ となる．$Z+c$ のなかで Λ に依存する項は相殺しているが，$Z+c$ そのものがゼロとなる先験的な理由は何もない．つまり，これは有限な数 λ_R であれば何でもよく，その値は実験で決められなければならない．これは理論の1つの結合定数とみなされるべきものである．この結果を次のようにも言い換えることもできる．すなわち，古典作用の $\lambda_0\mathcal{O}$ という項は $(\lambda_R+Z)\mathcal{O}$ と書くことができる．このことは，カウンター項は作用に含まれる項と同じ性質のものとなることを示している．正則化では保たれている対称性でも，その対称性の議論からある特定の項が禁止されている場合，そのような項はループ計算から生成されることはなく，したがって，作用やカウンター項から矛盾なく除くことができる．

QED の場合，作用のすべての項が次元ゼロかそれ以下である．(ただし，次元の数え上げに際して d^4x を入れている.）見かけの発散の次数 δ から，係数が発散する可能性のあるすべての項はゼロかそれ以下のものであることがわかる．この結果は他の場の理論でもやはり正しい．一般的に作用が $\mathcal{S}=\sum_i \alpha_i\mathcal{O}_i(\varphi)$ と表され $dim\,\mathcal{O}_i\leq 0$ となるならば，カウンター項の次元もゼロ以下となる．(ラグランジアンのレベルで言うと，場とその微分の局所的な単項式が次元が4以下であるならば，カウンター項の次元も4以下である.）よって，次元ゼロ以下の項から成る最も一般的な組み合わせで構成されている場の理論は繰り込み可能であると期待される．これは繰り込みの結果，有効作用には有限個の決まらないパラメータつまり結合定数 α_i があることを意味する．これらのパラメータが実験から決まれば，汎関数積分を使って理論的な予測を行うことができる．よって，QED の場合，繰り込まれた作用は次のような形をもつと期待できる．

$$\mathcal{S}=\sum_i \alpha_i\mathcal{O}_i(A,\bar{\psi},\psi). \tag{9.93}$$

ただし，$\mathcal{O}_i$ は場やその微分の単項式で次元がゼロ以下のものである．(厳密に言うと，作用の形はより制限される．というのも，光子に質量項があると伝

播関数が紫外領域で悪い振る舞いをするためである．これについては次章で簡単に議論するが，ここではゲージ不変性を要求し，このような問題は無視しよう.）特定の対称性がない場合はここまでが言えることのすべてである．QED の場合は次の対称性をもつ.

1. ローレンツ不変性
2. ゲージ不変性
3. パリティおよび荷電共役

これらの対称性を保つ正則化は存在するので，そのような正則化を使うと，これらの対称性を保つより制限された作用を選ぶことができる．これらの対称性を保ち，さらに次元ゼロ以下の項で表される作用のうち最も一般的なものが (9.90) である．したがって，QED は繰り込み可能な理論である.

これまで見かけ上の発散の次数をもちいて解析を行った．これらの解析が一般的に成立するのは，次のワインバーグによる収束定理のためである.

> あるファインマン図とそのすべての部分図が $\delta < 0$ をみたす場合，そのファインマン図に対応する積分は絶対収束する.

理論を構成する際には，この定理とボゴリューボフの再帰公式を使わなければならない．例えば，$\mathcal{O}(\hbar)$ の項を考えてみよう．$\delta \geq 0$ のファインマン図を考えると，すべての発散する項は次元ゼロ以下のものであることがわかる．$\mathcal{O}(\hbar^2)$ のオーダーでは，$\bar{R}_G$ を考えればよい．すでに部分図の発散は差し引いているので，$\bar{R}_G$ で生成される発散つまり $T_G\bar{R}_G$ は，G の見かけ上の発散の次数を考えるだけで解析できる．というのも，ここで部分図の寄与は収束するからである．そこで，$\delta(G) \geq 0$ となる項を解析すると，発散する可能性のある項は再び次元ゼロ以下のものだけであることがわかる．このように再帰的に考えると，次の結果が得られる.

$$\text{次元ゼロ以下の項} \Longrightarrow \text{次元がゼロ以下で発散する可能性のある項}$$

この結果と対称性の議論を合わせると，QED の摂動的な繰り込み可能性が証明される.

ゼロより大きい次元をもつ項があると，繰り込み可能性は失われる．例え

ば，次元 2 をもつ項 $\int d^4x(\bar{\psi}\psi)^2$ を考えよう．この項から図 9.14 のようなダイヤグラムが書ける．このダイヤグラムの寄与は発散しており，$\int d^4x(\bar{\psi}\psi)^3$ の形のカウンター項が必要である．このことはまた，作用に任意の結合定数をもつこの形の項がなければならないことを意味する．そしてそのような項から今度は図 9.15 のようなダイヤグラムが得られる．この図の寄与も発散しており，$\int d^4x(\bar{\psi}\psi)^6$ というカウンター項が必要となる．これはより発散するダイヤグラムを生成し，これを繰り返すと無限個のカウンター項が現れる．つまり，理論に無限個の結合定数が出てきてしまう．このため，次元ゼロより大きい項を作用に付け加えると，理論は一般に繰り込み不可能となる．

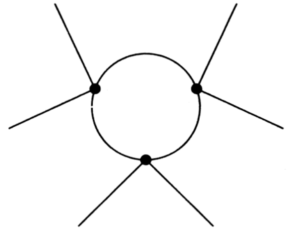


図 9.14　$(\bar{\psi}\psi)^2$ で作られる 6 つのフェルミオンを外線にもつ 1 ループ図．

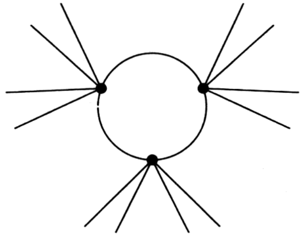


図 9.15　$(\bar{\psi}\psi)^3$ で作られるダイヤグラム．

繰り込み可能な理論の重要な例としては，QED，非アーベル型ゲージ理論，φ^4 相互作用をもつスカラー場の理論，および次の作用をもつスカラー QED がある．

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[|(\partial + ieA)\phi|^2 + m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 + \frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \right]. \tag{9.94}$$

繰り込み不可能な例として重要なものは，非線形シグマ模型，$V-A$ 型のカレント相互作用をもつ弱い相互作用の理論，およびアインシュタインの重力理論である．

どのような理論においても繰り込みの手続きを行うことはできる．また，行わなければならない．よって，繰り込み可能な理論と不可能な理論の違いは，有効作用をどのように解釈しもちいるかにある．繰り込み可能な理論では，有限個の結合定数とパラメータをもち，理論的な予測を行うのは容易である．しかし，繰り込み不可能な理論の場合，Γ には無限個の結合定数が含まれる．このような理論で使われる作用には，場とその微分から作られる任意の次元の単項式 $\mathcal{O}_i$ が存在する．このとき，低エネルギー領域では，高い次元をもつ項の効果は考えているエネルギーの大きさで抑制される．例えば，$\lambda\int d^4x(\bar{\psi}\psi)^2$ のような項を考えてみよう．結合定数 λ は次元 -2 をもつ必要がある．そこで，これを無次元量 g とこの理論の特徴的な質量の次元をもつ定数 M を使って g/M^2 と書こう．この項は 2 粒子散乱に寄与する．そのような散乱の全断面積は，最低次の次数では次元解析の議論から g^2p^2/M^4 として振る舞う．ここで，p は外線の運動量の典型的なスケールを表す．この項は $p \ll M$ のときには無視できるほどに小さい．よって，一般的に 2 粒子散乱について何か予測をしたいのであれば g の値を知る必要はあるものの，g が極端に大きくない限りはこの値を知らなくても低エネルギー（低い運動量）での結果を予測できる．このことが正当化される領域は，理論の特徴的な質量スケールである M の値で決まる．このため，理論の特徴的な質量スケールよりも十分小さなエネルギー領域に限定している限り，繰り込み不可能な理論を使って正しい予測を行うことが可能となる．

この質量スケールを次のように考えて評価することもできる．上で計算した断面積はエネルギーとともに増大する．しかし，断面積は S 行列のユニタリー性で制限されている．断面積が増大すると，あるエネルギーでこの上限値を破ってしまう．このことから，理論的な予測をするのに具体的な g の値が必要となるようなエネルギー・スケールを大まかに評価することができる．（この考えに沿った具体的な計算は 13 章で行う．）ここで新しい粒子（および場）を導入すると，ユニタリー性を議論するためのヒルベルト空間が拡大されて，ユニタリー性の実現の仕方が変わってくる．そのためユニタリー性の

破れは，衝突の中間状態に新しい粒子が生成されるシグナルとして解釈できる場合もある．これはまた，理論に新しい粒子を付け加える必要性のシグナルとして考えることもできる．

最終的には，無限個の結合定数を考えるよりも，何らかの対称性のために結合定数の間に関係がつくと考えたい．新しい場を導入する必要もあるであろう．それによって理論は有限のパラメータをもつ繰り込み可能な理論で書くことができ，繰り込み前の理論よりも大きな有効性をもつであろう．

そのような例として，π 中間子と核子の低エネルギーでの力学を記述するのに使われる非線形シグマ模型を考えよう．

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} f_\pi^2 \int d^4x \Bigg(\mathrm{Tr}\left[(U^{-1}\partial_\mu U)^2 \right] + \bar{N}\gamma \cdot \partial N + m\,\bar{N}\,U\,P_- N + \bar{N}\,U^\dagger\,P_+ N \Bigg), \tag{9.95}$$

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5).$$

上式で N は2成分縦ベクトルであり，その各成分は4成分スピノールで与えられる．N_1 は陽子の場，N_2 は中性子場を表す．U は (2×2) 行列であり，3成分ある π 中間子の場 φ^a $(a = 1, 2, 3)$ をもちいて $U = \exp(i\tau^a\varphi^a/\sqrt{2}\, f_\pi)$ と表せる．ここで，τ^a はパウリ行列であり，陽子と中性子場を結びつけるアイソスピン変換を生成している．また，f_π は定数であり，π 中間子の崩壊定数と呼ばれる．この理論は，π 中間子について高次の次元をもつ項を相互作用として含んでおり，繰り込み不可能な理論である．この理論の繰り込みを行うには，(9.95) に無限個の項を付け加えなければならない．そのなかの最も単純な項として

$$\mathcal{S}_1 = c \int d^4x\, \mathrm{Tr}\left[(U^{-1}\partial_\mu U)^4 \right] \tag{9.96}$$

がある．π 中間子どうしの散乱から，この理論 (9.95) はおよそ $4\pi f_\pi$ 程度のエネルギー領域まで適用可能であることがわかる．このエネルギーに近づくと (9.96) の項からの寄与が重要になるため，作用に付け加える必要がある．$\mathcal{S}_1$ より高次の項もエネルギーを上げていくと重要になってくる．そして最後はどんどんと新しい場や項が必要となり，この理論 (9.95) が別の理論の低エ

ネルギー近似となるような理論を探さなければならなくなる．π 中間子と核子の場合には，そのような理論は量子色力学 (QCD) である．

似たような状況が重力の場合も起こる．実際，アインシュタイン理論から低エネルギーでの予測を行うことができる．この理論のエネルギー・スケールはプランク質量 $M_P = (G_N)^{-\frac{1}{2}} \approx 10^{19}\,\mathrm{GeV}$ である．(ただし，G_N はニュートン定数.) これまでのすべての実験はこのエネルギーよりはるかに低いエネルギーであり，まだこの重力理論からのずれが問題になるようなことはない．アインシュタイン作用よりも高い次元をもつ項，例えばリーマンテンソルの2乗の項などは重力理論にあるはずである．このような項は無限個あるが，望むらくは，背後に何らかの対称性があってこれらの高い次元をもつ項の間に関係がつき，有限個のパラメータをもつ作用にまとまることである．そうすれば重力を繰り込み可能な理論として定式化できる．これがどのような理論となるのかまだ知られていないが，弦理論はそのような理論の1つであるかもしれない．

正則化についての注

正則化の方法を変えると発散項が有限の値だけ変化する．そのためカウンター項も有限の値だけ変化し作用に現れるパラメータも変わる．しかし，これらの値は実験で決められるものであり，ある運動量での散乱振幅で特定できる．もし散乱断面積をある運動量での散乱振幅の値で書いたとすると，理論のパラメータは（この運動量での振幅を使って）消すことができ，その結果，理論は正則化の方法によらなくなる．

カウンター項と正則化の関係が与えられれば，正則化の選び方はカウンター項の（係数の）選び方と等価であると言える．このことは正則化においては，対称性が特に重要なものでないことを示している．望ましい対称性を保つ正則化が存在する場合でも，その対称性を保たないような正則化を行うことができる．その場合，対称性を保たないカウンター項が必要である．そうすると，繰り込まれた Γ に対しては望ましい対称性を要請することができる．例えば，QED の真空偏極をゲージ不変でない正則化で計算すると，A^2A^2 のような項が現れる．これは，カウンター項 $\mu^2 A^2$ を導入して μ^2 を適当にとると

相殺できる．このカウンター項はゲージ不変性をもたないが，このこと自体は問題ではない．ゲージ不変性が重要となるのは，光子の非物理的な偏極を取り除き，ユニタリー性をもつ理論を得るときである．したがって，この繰り込まれた理論にはゲージ不変性が要請されなければならず，カウンター項 A^2 が真空偏極の計算から生成される A^2 項を完全に相殺するようになっていなければならない．これは，真空偏極で横波部分 $\Pi^{\mu\nu}$ だけが残るようにするのと同じことである．よって，ゲージ不変性を破る正則化を使っても，カウンター項の係数を正しくとって繰り込まれた作用がゲージ不変となるように要請する限りまったく問題がない．そうは言っても，実際の計算，特に多くの外線の粒子やループがあるような場合には，ゲージ不変な正則化を行うのが代数的に簡単である．(また，光子質量に対する実験からの上限値は非常に小さく，$2 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV}$ より小さいことにも注意が必要であろう.)

古典的な作用がもつすべての対称性を保つ正則化が存在しない場合もある．特に，対称性の数が多い場合にそのようなことが起こる．このような場合には，繰り込まれた理論ですべての対称性を要請することが不可能となる．そのときは，ユニタリー性で要請されるような最も重要な対称性を課し，それ以外の対称性を破るような Γ をもちいればよい．正則化によって破れる対称性は，異常な対称性と呼ばれる．この点については，13章で詳しく議論する．

9.8　スカラー場の繰り込み群方程式

繰り込まれた理論のグリーン関数 $G(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ が紫外切断 Λ によらないことから，グリーン関数の漸近的な振る舞いに対して制限を与えることができる．これはグリーン関数が，運動量や座標のスケール変換に対してどのように振る舞うかという方程式で記述され，そのような方程式は繰り込み群 (RG) 方程式と呼ばれる．繰り込み群方程式を使ってグリーン関数の漸近的な振る舞いが決定できる．また，この方程式は，統計力学の場の理論的なさまざまな模型において，それらの場の臨界指数を決定するのに使うこともできる．この節では，スカラー場の理論の繰り込み群方程式を導出しよう．

質量のないスカラー場の理論のグリーン関数は

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \mathcal{N} \int [d\varphi]\, e^{-\mathcal{S}}\, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N) \tag{9.97}$$

で与えられる．ただし，

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} Z_3(\Lambda)(\partial\varphi)^2 + \lambda Z_1(\Lambda)\varphi^4\right] \tag{9.98}$$

である．このように定義されたグリーン関数は $\Lambda \to \infty$ で有限の値をとる．場 χ を $\varphi = Z_3^{-\frac{1}{2}}\chi$ で定義すると

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \lambda_0\,\chi^4\right], \\ \lambda_0 &= \lambda Z_1(\Lambda) Z_3^{-2}(\Lambda) \end{aligned} \tag{9.99}$$

となる．ここで，λ_0 は λ と Λ によっている．この関係式を逆に解き λ を λ_0 と Λ の関数とみなすこともできる．つまり，$\lambda = \lambda(\lambda_0, \Lambda)$ とおける．λ は紫外切断（カットオフ）Λ にはよらないので，λ_0 の Λ 依存性は，関数 λ の Λ 依存性を完全に打ち消している．すなわち，

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda_0}\right)_\Lambda \frac{\partial\lambda_0}{\partial\log\Lambda} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\log\Lambda}\right)_{\lambda_0} = 0 \tag{9.100}$$

が成立する．

変数 χ を使うと，グリーン関数は

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= \tilde{\mathcal{N}}\, {Z_3}^{-N/2} \int [d\chi] e^{-\mathcal{S}}\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N) \\ &= {Z_3}^{-\frac{1}{2}N} \langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N)\,\rangle \end{aligned} \tag{9.101}$$

と書ける．ここで，

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \tilde{\mathcal{N}} \int [d\chi] e^{-\mathcal{S}}\, \mathcal{O} \tag{9.102}$$

という表記法をもちいた．

つぎに，繰り込み群方程式に移ろう．グリーン関数の Λ 非依存性は

$$\frac{d}{d\log\Lambda} G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \tag{9.103}$$

と書ける．(9.101) の G の表式を微分すると

$$-\frac{N}{2}\frac{d\log Z_3}{d\log\Lambda} G - {Z_3}^{-N/2} \langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N) \left(\frac{d\mathcal{S}}{d\log\Lambda}\right) \rangle = 0 \tag{9.104}$$

を得る．これをさらに変形するには，作用 $\mathcal{S}$ のカットオフ依存性が必要である．これは次の2つに起因する．1つは相互作用項にある λ_0 のカットオフ依存性，もう1つは場の単項式の積分からくる依存性である．2つ目は運動量空間で表すとわかりやすい．例えば，

$$\mathcal{S}_0(\Lambda) \equiv \frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial\chi)^2 = \frac{1}{2}\int_{p^2\leq\Lambda^2}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\chi(-p)\,p^2\,\chi(p) \tag{9.105}$$

を見ると，運動量の最大値は Λ で与えられている．つまり，空間に短距離での切断があり $|x-y| \geq 1/\Lambda$ が成立しなければならない．もし Λ を $(1+\sigma)\Lambda$ で置き換えると，$|x-y| \geq 1/(1+\sigma)\Lambda$ となる．よって，この積分は，$x \to z = x\,(1+\sigma)$, $|z-z'| \geq 1/\Lambda$ という変数変換をすることで，カットオフ Λ をもつ積分に関係づけられる．これから

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0((1+\sigma)\Lambda) = \frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial\chi)^2\Big|_{(1+\sigma)\Lambda} &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+\sigma)^2}\int d^4z\,(\partial\chi)^2\Big|_{z/1+\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\int d^4z\,(\partial\tilde{\chi})^2\end{aligned} \tag{9.106}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(z) &= \frac{1}{1+\sigma}\,\chi(z/1+\sigma) \\ &\approx \chi(z) - \sigma\left(z\cdot\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\chi(z) \\ &\approx \chi - \sigma(D\chi)\end{aligned} \tag{9.107}$$

である．カットオフを変更した効果は，場 χ を $\sigma(D\chi)$ だけ変化させることである．ここで，

$$D\chi \equiv \left(z\cdot\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\chi \tag{9.108}$$

は場のディラテーションつまりスケール変換の効果を表している．よって，式 (9.106) は

$$-\frac{d\mathcal{S}_0}{d\log\Lambda} = \int d^4x\,(D\chi)\frac{\delta}{\delta\chi}\,\mathcal{S}_0 \tag{9.109}$$

と書ける．相互作用項についても同様に表せ，λ_0 が Λ にあらわに依存する寄与も含めて

$$-\frac{d\mathcal{S}_{int}}{d\log\Lambda} = \int d^4x\,(D\chi)\frac{\delta}{\delta\chi}\,\mathcal{S}_{int} - \frac{d\lambda_0}{d\log\Lambda}\int d^4x\,\chi^4 \tag{9.110}$$

となる．これらの結果を (9.104) に入れると

$$-\frac{N}{2}\frac{d\log Z_3}{d\log \Lambda}G + {Z_3}^{-N/2}\langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N)\left(\int (D\chi)\frac{\delta}{\delta\chi}\mathcal{S}\right)\rangle$$
$$-\frac{d\lambda_0}{d\log\Lambda}{Z_3}^{-N/2}\langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N)\int d^4x\,\chi^4\,\rangle = 0 \quad (9.111)$$

を得る．

汎関数積分で $\chi \to \chi' = \chi + \delta\chi$ と変数変換をすると

$$\int [d\chi]\, e^{-\mathcal{S}(\chi)}\mathcal{O}(\chi) = \int [d\chi'] e^{-\mathcal{S}(\chi')}\mathcal{O}(\chi')$$
$$= \int [d\chi]\, e^{-\mathcal{S}(\chi)}\mathcal{O}(\chi) + \int [d\chi]\, e^{-\mathcal{S}(\chi)}\Big[\delta\mathcal{O} - \mathcal{O}\,\delta\mathcal{S}\Big] \quad (9.112)$$

という恒等式が得られる．すなわち，

$$\langle\delta\mathcal{O}\rangle - \langle\mathcal{O}\,\delta\mathcal{S}\rangle = 0 \quad (9.113)$$

が成立する．式 (9.111) はさらに

$$\left[\sum x_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + N - \frac{N}{2}\frac{d\log Z_3}{d\log\Lambda}\right] G(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$
$$-\frac{\partial\lambda_0}{\partial\log\Lambda}{Z_3}^{-N/2}\langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N)\int d^4x\ \chi^4\,\rangle = 0 \quad (9.114)$$

と変形できる．相互作用項 $\int\chi^4$ が挿入されている項はグリーン関数の相互作用依存性から求められる．グリーン関数についての表式 (9.101) を微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_0}G = -\frac{N}{2}\left(\frac{\partial\log Z_3}{\partial\lambda_0}\right)_{\Lambda} G - {Z_3}^{-N/2}\langle\, \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_N)\int\chi^4\,\rangle \quad (9.115)$$

となる．ここで，Z_3 は λ_0 と Λ の関数であると考える．さらに

$$\frac{d\log Z_3}{d\log\Lambda} = \left(\frac{\partial\log Z_3}{\partial\lambda_0}\right)_{\Lambda}\frac{\partial\lambda_0}{\partial\log\Lambda} + \left(\frac{\partial\log Z_3}{\partial\log\Lambda}\right)_{\lambda_0} \quad (9.116)$$

と書くと，式 (9.114) は

$$\left[\sum x_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + N(1+\gamma) + \frac{\partial\lambda_0}{\partial\log\Lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\right] G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \quad (9.117)$$

と書ける．ただし，

$$\gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log Z_3}{\partial \log \Lambda}\right)_{\lambda_0} \tag{9.118}$$

である．最後にこの表式を λ_0 の微分ではなく繰り込まれた結合定数 λ についての微分で書かれた表式に書き直そう．λ_0 は式 (9.99) で与えられているように λ の関数なので，(9.100) を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_0}{\partial \log \Lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda_0}G &= \frac{\partial \lambda_0}{\partial \log \Lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0}\right)_\Lambda \frac{\partial G}{\partial \lambda}\\ &= -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \log \Lambda}\right)_{\lambda_0}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\\ &= \beta(\lambda)\frac{\partial G}{\partial \lambda}\end{aligned} \tag{9.119}$$

となる．この式と式 (9.117) より繰り込み群 (RG) 方程式が得られる．

$$\left[\sum x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + N(1+\gamma) + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda}\right] G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0. \tag{9.120}$$

この方程式に現れる関数 β と γ は

$$\begin{aligned}\beta &= -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \log \Lambda}\right)_{\lambda_0},\\ \gamma &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log Z_3}{\partial \log \Lambda}\right)_{\lambda_0}\end{aligned} \tag{9.121}$$

で与えられている．これらは結合定数 λ の関数である．

φ^4 理論では，摂動論の最低次での β や γ を，繰り込み定数についての具体的な表式から簡単に計算できて

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \frac{9\lambda^2}{2\pi^2} + \cdots,\\ \gamma(\lambda) &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^4} + \cdots\end{aligned} \tag{9.122}$$

となる．

相互作用のない理論では β や γ はゼロであり，繰り込み群方程式からグリーン関数は次元 N の関数として振る舞うこと，つまり場 φ は次元 1 の量として振る舞うことがわかる．これは式 (9.108) や (9.109) で，場がスケール変換に対してどう振る舞うのかを見ても明らかである．相互作用する理論

の場合，一般に，グリーン関数はもはやスケール則に従う振る舞いをしない．しかし，$\beta = 0$ となる特殊な状況では，スケール則が存在する．このとき，N 点グリーン関数の次元は N ではなく $N(1+\gamma)$ となる．このことから γ は場 φ の異常次元と呼ばれる．β は相互作用によってスケール則が破れる度合いを示しており，β 関数と呼ばれる．一般的に相互作用する理論のグリーン関数には単純なスケール則は存在しないが，$\beta = 0$ となるような状況ではスケール則が現れる．言い換えると，理論が β 関数のゼロ点で定義される．このようなゼロ点は，理論によっては，非常に高い運動量領域あるいは非常に低い運動量領域で実現される．どのような場合にこのようなことが起こり，その結果どのようなスケール則が得られるのかを知るためには，繰り込み群方程式を解く必要がある．

9.9　繰り込み群方程式の解と臨界現象

繰り込み群方程式の解は有効結合定数 $\bar{\lambda}$，または走る結合定数 (running coupling constant) と呼ばれる量を使って簡単に得ることができる．有効結合定数は

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds} = -\beta(\bar{\lambda}) \tag{9.123}$$

で定義される．ここで，s はスケール変換のパラメータであり，座標を $x \to e^s x$ とスケール変換する．(9.123) は

$$s = -\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{du}{\beta(u)} \tag{9.124}$$

と表せる．$\bar{\lambda}$ は λ と s の関数として与えられ，$s=0$ で $\bar{\lambda} = \lambda$ となる初期条件をもつ．(9.124) の両辺を λ で微分すると

$$\beta(\lambda)\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \tag{9.125}$$

となる．このとき，繰り込み群方程式の解は

$$G(e^s x_1, e^s x_2, \ldots, e^s x_N, \lambda) = G(x_1, x_2, \ldots, x_N, \bar{\lambda}) \exp\left(\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{\Delta(u)}{\beta(u)} du\right) \tag{9.126}$$

と書ける．ただし，$\Delta = N(1+\gamma)$ である．s で微分すればこれが解となることを確かめられる．これから，方程式

$$\sum_i x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} G = -\beta(\bar{\lambda}) \frac{\partial G}{\partial \bar{\lambda}} - \Delta(\bar{\lambda}) G \tag{9.127}$$

が得られる．λ で直接に微分して (9.125) を使うと

$$\beta(\lambda) \frac{\partial G}{\partial \lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \frac{\partial G}{\partial \bar{\lambda}} + \Delta(\bar{\lambda}) G - \Delta(\lambda) G \tag{9.128}$$

となる．この 2 つの方程式 (9.127) と (9.128) から実際に式 (9.126) の G が繰り込み群方程式の解となっていることがわかる．

解の性質は β 関数のゼロ点を考えることで理解できる．摂動的には $\lambda = 0$ で β はゼロとなる．ただ，一般には他のゼロ点もありうる．β がゼロとなる λ を λ_* と書く．つまり $\beta(\lambda_*) = 0$ とする．結合定数がこの値であるとき，繰り込み群方程式 (9.120) は簡単に解け，$\beta = 0$ とおくことで

$$G(e^s x_1, e^s x_2, \ldots, e^s x_N, \lambda_*) = \exp(-s\Delta(\lambda_*))\, G(x_1, x_2, \ldots, x_N, \lambda_*) \tag{9.129}$$

が得られる．これから，グリーン関数は次元 $\Delta(\lambda_*) = N(1+\gamma(\lambda_*))$ をもつ簡単なスケール則に従うことがわかる．φ が次元 1 をもつので，G に期待される正準次元は N である．λ_* での γ の値は，その結合定数の値における異常次元である．β 関数のゼロ点では，走る結合定数はスケール変換に対して定数であり，変化しないことに注意しよう．この意味で β 関数のゼロ点は固定点 (fixed point) と呼ばれる．固定点 λ_* の近傍では，β は $\beta \approx \beta'(\lambda_*)(\lambda - \lambda_*)$ と書ける．式 (9.123) から，$\beta'(\lambda_*) > 0$ の場合，$\bar{\lambda}$ は s を増やすと固定点 λ_* に近づく．一般的にグリーン関数は座標の差 $x_i - x_j$ の関数であるので，s を増やすことはより遠く離れた現象を考えることに対応する．つまり，赤外領域の極限をとることに対応する．このため，このような固定点は赤外安定な固定点 (infrared stable fixed point) と呼ばれる．そのような理論のグリーン関数（あるいは相関関数）は赤外極限でスケール不変な振る舞いをし，赤外安定な固定点である結合定数 λ_* をもつ有効理論で記述される．このようなスケール不変の振る舞いのため，この理論は臨界的であると言われる．一方で，$\beta'(\lambda_*) < 0$ の場合，$\bar{\lambda}$ は s を減らす（つまり短距離へ行く）ほどに固定

点に近づく．このような理論は，紫外安定な固定点 (ultraviolet stable fixed point) をもち，大きな運動量領域において臨界理論で記述される．固定点への近づき方も重要である．もし固定点にゆっくりと，例えば対数的に近づくとすると，理論は決してスケール不変にはならず，漸近的な臨界理論しか得られない．

一般解 (9.126) からわかることは，一般的にグリーン関数はスケール不変な振る舞いをしないということである．それにもかかわらず，スケール変換に対するグリーン関数の振る舞いにはとても簡単な法則がある．座標 x をスケール変換したときのグリーン関数の変化は結合定数を有効結合定数 $\bar{\lambda}$ で置き換えて，さらにグリーン関数の次元からくる余分な指数因子をかけることで得られる．

摂動論では，β は結合定数の級数展開で求められるので，結合定数がゼロのところで常に β 関数はゼロ点をもつ．この近くで β が正であるとすると $\lambda = 0$ は赤外安定な固定点である．つまり，理論は低い運動量の物理過程に対して摂動的に振る舞う．これは φ^4 理論の場合がそうであり，また QED の場合も同様である．紫外の運動量領域では，有効結合定数（または走る結合定数）が大きくなって強結合理論になる．一方，β が負であれば，運動量が大きくなるような物理過程に対して（つまり紫外領域の極限で）自由な理論になる．実際，物質場の数があまり多くない非アーベル型ゲージ場の理論がこの例に当たる．この場合，理論の高エネルギー極限が摂動的となる．またこのとき，自由な理論への近づき方は対数的でしかないので，この理論は漸近的自由性 (asymptotic freedom) をもつと言われる．次章では，QCD の漸近的自由性についてもう少し詳しく議論する．

繰り込み群は場の理論の臨界的な振る舞いを研究するのに広く応用されてきた．2 次相転移においては，相関関数はスケール則に従い，繰り込み群の手法を使って相関関数の臨界指数を計算することができる．ここで，簡単な例について見てみよう．3 次元空間での φ^4 理論を考える．この理論は 3 次元イジング模型の臨界点での振る舞いを記述するのによいモデルである．簡単に解析をするために，理論が $(4-\epsilon)$ 次元で定義されていると考えよう．特にいまの場合は，$\epsilon = 1$ である．ϵ は展開パラメータであるが，最終的にこれを 1 とおくと，これまでの解析が適用できる．このとき，場の次元は $1 - \frac{1}{2}\epsilon$

となるので，相互作用項 $\int d^{4-\epsilon}x\,\varphi^4$ はゼロでない正準次元 $-\epsilon$ をもつ．よって，(9.110) と同じ計算を行うと，β 関数は $(4-\epsilon)$ 次元の理論の値に新たな寄与 $-\epsilon\lambda$ が付け加わる．

$$\beta(\lambda) = \beta(\lambda)|_{4-\epsilon} - \epsilon\lambda. \tag{9.130}$$

β を λ と ϵ に関して最低次の摂動展開で求めると

$$\beta(\lambda)|_{4-\epsilon} \approx \beta(\lambda)|_4 \approx \frac{9\lambda^2}{2\pi^2} \tag{9.131}$$

となる．これから，β 関数が

$$\lambda_* = \frac{2\pi^2}{9}\epsilon \tag{9.132}$$

の結合定数の値のときにゼロ点をもつことがわかる．異常次元は

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda)|_{4-\epsilon} &\approx \gamma(\lambda)|_4 \approx \frac{3\lambda^2}{16\pi^4}, \\ \gamma(\lambda_*) &\approx \frac{\epsilon^2}{108} \end{aligned} \tag{9.133}$$

で与えられる．したがって，繰り込み群方程式の解から，相関関数がスケール不変な振る舞いをし，φ が有効次元 $1-\frac{1}{2}\epsilon+\gamma(\lambda_*) \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{108}$ をもつことがわかる．グリーン関数は座標の差の関数であるので，これから，関係式

$$G(x_1, x_2) \sim \frac{1}{|x_1 - x_2|^{1+\eta}} \tag{9.134}$$

が得られる．ただし，いまの展開次数の範囲内では臨界指数は $\eta = \epsilon^2/54 = 1/54$ で与えられる．固定点での結合定数と臨界指数の値は十分ゼロに近く，ここでの摂動計算が妥当であることに注意しよう．

3次元理論を解析する手法として，ϵ 展開を高次の次数まで実行することができる．しかし，これは漸近展開であるので，高次の計算をすればするほどよりよい臨界指数が得られるわけではない．最もよい近似計算は，理論に依存したある適当な次数で与えられる．

原理的には，相関関数は摂動展開の再和をとること，もしくはシュウィンガー–ダイソン方程式を解くことで計算できる．繰り込み群方程式は，興味のある運動学的領域（紫外，赤外どちらの領域でも）でシュウィンガー–ダイソ

ン方程式を効率的に解く方法を与えていると見ることができる．この点に関して，非常に有用な視点もある．つまり，もし興味のある領域が赤外領域であれば，繰り込み群方程式の手法は，高い運動量をもつモードの効果を取り込んだ低エネルギー有効作用を求める処方を与えると考えることもできる．

参考文献

1. 繰り込みの考え方は H.A. Kramers, Nuovo Cim. **15**, 108 (1938) による．繰り込みは初期の量子電磁力学で精力的に開発された．その歴史については，例えば，S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It*, Princeton University Press (1994) を参照されたい．多くの原論文については J. Schwinger, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (1958) を参照されたい．

2. 1 ループの有効ポテンシャルは S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973) による．

3. QED の繰り込み可能性の初期の証明はダイソン (F. Dyson)，マシューズ (P.T. Matthews) およびサラム (A. Salam)，ウォード (J.C. Ward) 等によってなされた．この点についてのまとまった良書として A.S. Wightman, in *Renormalization Theory*, G. Velo and A.S. Wightman (eds.), D. Reidel Publishing Co. (1976) がある．

4. ウォード–高橋恒等式は J.C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182(1950); Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6**, 371 (1957) による．

5. ランダウの極については L.D. Landau, *Niels Bohr and the Development of Physics*, Pergamon Press (1955) で議論されている．

6. 完全な 1 ループでの真空偏極の計算はシュウィンガー (J. Schwinger) によって与えられた．この計算とエーリング極限については，文献 1 のシュウィンガーのリプリント集を参照されたい．

7. 電子の自己エネルギーによるラムシフトの計算は H.A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947) による．その相対論的な計算は N.M. Kroll and W. Lamb, Phys. Rev. **75**, 388 (1949); J.B. French and V. Weisskopf, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949) でなされた．この計算はその後，多くの人によって改良された．一般的な理論的枠組みは G.W. Erickson and D.R. Yennie, Ann. Phys. **35**, 271 (1965) で与えられている．また，引用した理論的値は次の文献による．P.J. Mohr, Phys. Rev. Lett. **34**, 1050 (1974).

8. ラムシフトの実験値は S.R. Lundeen and F.M. Pipkin, Phys. Rev. Lett. **34**, 1368 (1975); D.A. Andrews and G. Newton, Phys. Rev. Lett. **37**, 1254 (1976) による．

9. $(g-2)$ の値についての最初の補正計算はシュウィンガーによってなされた．その

後の理論の発展については，次の文献でレビューされている．T. Kinoshita, in *Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita (ed.), World Scientific Pub. Co. (1990).

10. $(g-2)$ の実験値は R.S. Van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987) から引用した．

11. BPHZ の方法に関する原論文は以下のとおりである．N.N. Bogoliubov and O.S. Parasiuk, Doklady Acad. Nauk. SSR, **100**, 25, 429 (1955); Acta Math. **97**, 227 (1957); K. Hepp, Commun. Math. Phys. **2**, 301 (1966); W. Zimmerman, Commun. Math. Phys. **6**, 161 (1967); *ibid.* **11**, 1 (1969); *ibid.* **15**, 208 (1969). また，文献 3 で挙げたベロ (G. Velo) とワイトマン (A.S. Wightman) の本に含まれているローウェンシュタイン (J.H. Lowenstein) の論文とツィマーマン (W. Zimmerman) の論文も参照されたい．ローウェンシュタインの論文では複合演算子の繰り込みも議論されている．

12. ファインマン積分の漸近的な振る舞いについての定理は S. Weinberg, Phys. Rev. **118**, 838 (1960) による．

13. 繰り込み群の研究は長い歴史をもつ．その最初のものとして，M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954); E.C.G. Stückelberg and A. Peterman, Helv. Phys. Acta **26**, 499 (1953) がある．繰り込み群の一般的な方法論の開発はウィルソン (K.G. Wilson) とウェグナー (F. Wegner) による．初期の論文として以下のものがある．K.G. Wilson, Phys. Rev. **B4** 3174, 3184 (1971); Phys. Rev. **D3**, 1818 (1971); *ibid.* **D6**. 419 (1972); F. Wegner, Phys. Rev. **B5**, 4529 (1972).

14. 本書で扱った繰り込み群方程式はカラン–シマンジック (Callan–Symanzik) 方程式に密接に関係している．カラン–シマンジック方程式は C.G. Callan, Jr., Phys. Rev. **D2**, 1541 (1970); K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18**, 227 (1970) による．

15. 繰り込み群による臨界指数の計算は K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972); K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **28**, 548 (1972) による．いまではこの分野は大変発展しており，その発展については D.J. Amit, *Field Theory, Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw Hill (1978); J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press (1996) を参照されたい．

16. 厳密繰り込み群方程式として知られている繰り込み群方程式もあり，それは K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974); K.G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975); F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8**, 401 (1972) で与えられた．本文では議論しなかったが，厳密繰り込み群を使うと，ある種の理論の繰り込み可能性を簡単に証明することができる．これについては，他の応用も含め次の文献を参照されたい．J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231**, 269 (1984).

第10章

ゲージ理論

10.1 ゲージ原理

電磁力学における最小結合の原理さらにはこの原理がゲージ不変性の要請から導けることについては，6章ですでに議論した．フェルミオン場 ψ と電磁場 A_μ の相互作用は次のラグランジアンで記述される．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\right]\psi. \tag{10.1}$$

このラグランジアンはゲージ不変性をもつ．つまり，次の変換のもとで不変である．

$$\begin{gathered} \psi \to \psi' = e^{ie\theta}\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-ie\theta}, \\ A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta. \end{gathered} \tag{10.2}$$

ここで，θ は時空 $\mathcal{M}$ 上の任意関数である．この変換は，群 $U(1)$ に値をとる時空 $\mathcal{M}$ 上の関数 $g(x) = \exp(ie\theta(x))$ を導入することで，次のように書くこともできる．

$$\begin{gathered} \psi' = g\psi, \qquad \bar{\psi}' = \bar{\psi}g^{-1}, \\ eA'_\mu \equiv eA^g_\mu = g(eA_\mu)g^{-1} - i\partial_\mu g g^{-1}. \end{gathered} \tag{10.3}$$

ただし，電荷 e は関数 θ の中に吸収した．この章では，この最小結合の原理を $U(1)$ 以外のゲージ群へ一般化しよう．

ゲージ群 $SU(N)$ の変換に対して，基本表現として互いに移り変わる場

$\psi_i\,(i=1,2,\ldots,N)$ を考えよう.(言い換えると,ψ_i は,$SU(N)$ の基本表現に従う N 次元ベクトル空間の要素である.)この場 ψ_i に対して次のゲージ変換を導入する.

$$\psi'_i = g_{ij}(x)\,\psi_j. \tag{10.4}$$

ただし,g_{ij} は基本表現での $SU(N)$ の要素,すなわち行列式が 1 の $(N\times N)$ ユニタリー行列である.g_{ij} は時空点に依存するので,これは時空上で $SU(N)$ 群に値をもつ関数となる.より一般的に,表現 R とこの表現に属する場 ϕ_α に対して,ゲージ変換は

$$\phi'_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\beta}(g)\,\phi_\beta \tag{10.5}$$

と表される.ここで,$\mathcal{D}_{\alpha\beta}(g)$ は,群の要素 g の表現 R における行列表示を意味する.他の群 G の任意の表現に対しても,まったく同様に変換則を書き下すことができる.

量子電磁力学での一般化として,場 ψ に対する「共変」微分を定義しよう.$\partial_\mu\psi'$ が

$$\partial_\mu\psi' = (\partial_\mu g)\psi + g(\partial_\mu\psi) \tag{10.6}$$

となることから,$\partial_\mu\psi$ は ψ とは異なり,共変には変換せず余分な項 $\partial_\mu g$ が付け加わる.そこで共変に変換するような微分 $D_\mu\psi$ を導入し

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + A_\mu)\,\psi \tag{10.7}$$

と書こう.つまり,行列に値をもつベクトルポテンシャル A_μ を導入して,その変換により $\partial_\mu\psi$ の変換の非斉次項を打ち消すようにする.言い換えると,共変な条件

$$D_\mu(A^g)(g\psi) = g\,(D_\mu(A)\psi) \tag{10.8}$$

を要請する.これより,A_μ の変換性は

$$A^g_\mu = gA_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g)g^{-1} \tag{10.9}$$

で与えられる.$(\partial_\mu g)g^{-1}$ はリー代数に値をとる.つまり,この項はリー群の要素 $g=\exp(-it^a\theta^a(x))$ をもちいて $-it^a\partial_\mu\theta^b e^a_b(\theta)$ と書ける.ここで,t^a はリー代数 G の生成子の行列表現であり,交換関係

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{10.10}$$

をみたす．t^a はエルミート行列で，f^{abc} は実の定数である．群の次元を $dim\, G$ とすると，a, b, c は $a, b, c = 1, 2, \ldots, dim\, G$ の値をとる．θ^a は，$dim\, G$ 個の独立な関数なので，一般に $dim\, G$ 個のポテンシャル A_μ が必要となる．さらに，A_μ は変換すると (10.9) で $\partial g g^{-1}$ が付け加わることからもわかるように，リー代数に値をもつ．よって，

$$A_\mu = -it^a A^a_\mu \tag{10.11}$$

と実関数 A^a_μ を使って表される．ここで，結合定数 e は A^a_μ に吸収した．結合定数 e は A^a_μ を eA^a_μ と置き換えることでいつでも再現できる．無限小変換 $g \approx 1 - it^a\theta^a$ $(\theta \ll 1)$ に対して，ゲージ変換は

$$A^g_\mu \approx A_\mu + it^a\left(\partial_\mu\theta^a + f^{abc}A^b_\mu\theta^c\right) \tag{10.12}$$

と書ける．第 2 項の $\left(\partial_\mu\theta^a + f^{abc}A^b_\mu\theta^c\right)$ は随伴表現に対する共変微分である．行列 $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ がリー代数 (10.10) を満たすことはヤコビの恒等式を使って証明できる．これは群の随伴表現と呼ばれる．随伴表現に対して，共変微分 (10.7) は

$$(D_\mu\theta)^a \equiv \partial_\mu\theta^a - iA^k_\mu(T^k)^{ab}\theta^b = \left(\partial_\mu\theta^a + f^{abc}A^b_\mu\theta^c\right) \tag{10.13}$$

と簡単に書ける．これを使って無限小変換 (10.12) は

$$A^g_\mu - A_\mu \approx it^a\,(D_\mu\theta)^a \tag{10.14}$$

と書ける．

共変微分によって，ゲージ場 A_μ と任意の物質場との結合則が得られる．すなわち，通常の微分があれば，それをすべて共変微分に置き換えればよい．もちろんゲージ場 A_μ 自身に対するラグランジアンも必要であるが，これは場の強さを使って与えられる．ここで，場の強さのテンソル $F_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = [D_\mu, D_\nu] \\ &= -it^a\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right) \\ &\equiv -it^a F^a_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.15}$$

で定義される．

D_μ の共変性から

$$F_{\mu\nu}(A^g)(g\psi) = [D_\mu(A^g), D_\nu(A^g)](g\psi) = g[D_\mu, D_\nu]\psi = gF_{\mu\nu}\psi \tag{10.16}$$

が得られる．すなわち，$F_{\mu\nu}$ は

$$F_{\mu\nu}(A^g) = g\, F_{\mu\nu}\, g^{-1} \tag{10.17}$$

と共変に変換する．$F_{\mu\nu} = -it^a F^a_{\mu\nu}$ と $gt^b g^{-1} = \mathcal{D}^{ab}(g)t^a$ を使うと，

$$F^a_{\mu\nu}(A^g) = \mathcal{D}^{ab}(g)\, F^b_{\mu\nu} \tag{10.18}$$

となる．ここで，$\mathcal{D}^{ab}(g)$ は群の要素 g の随伴表現での行列表示である．行列 t^a の規格化を $\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ とすると，g の随伴表現での行列表示は，$\mathcal{D}^{ab}(g) = 2\mathrm{Tr}(t^a g t^b g^{-1})$ で与えられる．

ゲージ場 A_μ に対するラグランジアンの1つとして

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = \frac{1}{2e^2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{10.19}$$

を選ぶことができる．$F_{\mu\nu}$ についての共変な変換性 $F_{\mu\nu}(A^g) = gF_{\mu\nu}g^{-1}$ より，$\mathcal{L}$ は明らかにゲージ不変である．このラグランジアン (10.19) はヤン–ミルズ (Yang–Mills) 理論のラグランジアンと呼ばれる．これは電磁場におけるマクスウェルのラグランジアンを一般化したものである．この形のラグランジアンはリー群の値をもつ場（ヤン–ミルズ場）に対する最も簡単な一般化を与えるが，他の形のラグランジアンも，少なくとも特別な場合には，可能である．例えば，3次元時空では，いわゆるチャーン–サイモンズ (Chern–Simons) 項と呼ばれる項

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\left(A_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha} \tag{10.20}$$

による一般化も可能である．ただし，$\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ は3次元のレビ-チビタ記号である．(実際には，このラグランジアンはすべてゲージ変換に対して不変にはなっていない．ただ，無限小変換に対する変化分は全微分で表されるため，作用は不変である．また，ホモトピカルに非自明な変換と呼ばれるものがあり，その変換のもとで作用は不変とはならない．しかし，量子論において重要な量

である $e^{i\mathcal{S}}$ は，κ が整数値であるときに不変となる．したがって，そのような場合にのみ量子論を正しく定義することができる.）しかしながら，本章では，ヤン–ミルズ型の理論に焦点を当てて考えることにする．

物質場と相互作用しているヤン–ミルズ場 A_μ の運動方程式は (10.19) から簡単に求めることができる．$\delta F^a_{\mu\nu} = (D_\mu \delta A_\nu - D_\nu \delta A_\mu)^a$ を使うと $\delta \mathcal{L} = (1/e^2) F^a_{\mu\nu}(D_\mu \delta A_\nu)$ が得られる．よって，運動方程式は

$$(D_\mu F^\mu_\nu)^a + e^2 \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta A^a_\nu} = 0 \tag{10.21}$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{S}_m$ は物質場の作用つまりヤン–ミルズ作用以外の部分である．電磁場の場合の恒等式 $\partial_\alpha F_{\mu\nu} + (\text{巡回項}) = 0$ と同様に，ビアンキ恒等式

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\alpha\mu} + D_\mu F_{\nu\alpha} = 0 \tag{10.22}$$

が成立する．この恒等式は交換関係に対するヤコビの恒等式 $[D_\mu, [D_\nu, D_\alpha]] + [D_\nu, [D_\alpha, D_\mu]] + [D_\alpha, [D_\mu, D_\nu]] = 0$ から直接導くことができる．

ゲージ原理の重要な点は，ゲージ場 A_μ と異なる電荷をもつ物質場との結合が一様に与えられることである．量子電磁力学 (QED) の場合，すでに見たように，電荷 n をもつ粒子に対応する場との結合は

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= (\partial_\mu - inA_\mu)\psi, \\ \psi' &= e^{in\theta}\,\psi \end{aligned} \tag{10.23}$$

で与えられる．非アーベル型リー群 G の場合，異なる電荷とは異なる表現を意味する．よって，一般的なリー群 G の表現 R をもつ粒子に対応する場との結合は

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= (\partial_\mu - it^a_R A^a_\mu)\psi, \\ \psi' &= \mathcal{D}_R(g)\,\psi \end{aligned} \tag{10.24}$$

で与えられる．A^a_μ は常に同じであり，その数は $dim\, G$ で与えられる．t^a_R は表現 R における群 G のリー代数の生成子の表現行列である．単純群のそれぞれに対して 1 つだけの結合定数 e が存在する．例えば，$SU(2)$ 群の 2 次元表現と 3 次元表現に属する物質場があれば（つまりスピン j の値が $\frac{1}{2}$ と 1 であれば），それぞれの物質場との結合は次のように与えられる．

$$\psi_\alpha\,(\alpha=1,2),\quad (t^a)_{\alpha\beta}=\left(\frac{\sigma^a}{2}\right)_{\alpha\beta},\quad (D_\mu\psi)_\alpha=\partial_\mu\psi_\alpha-i\left(\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu\psi\right)_\alpha,$$

$$\phi_b\,(b=1,2,3),\quad (t^a)_{bc}=-i\epsilon^a_{bc},\quad (D_\mu\phi)^a=\partial_\mu\phi^a+\epsilon^{abc}A^b_\mu\phi^c. \quad (10.25)$$

10.2　平行移動

物質場（ψ, ϕ など）は，次元 $dim\,R$ の線形空間 V 上のベクトルと考えられる．つまり，空間の各点 x^μ において

$$\psi=\psi_i e_i\ \in V_x \quad (10.26)$$

のようにベクトル空間 V の基底 e_i を使って展開できる．ゲージ変換 $\psi'_i=g_{ij}\psi_j$ はベクトル空間 V の異なる基底をとることと等価である．ゲージ変換 g は座標 x^μ に依存するので，理論のゲージ不変性とは x^μ で指定される時空の各点でどのようなベクトル空間 V の基底（フレーム）を選んでも物理が変わらないことを意味する．各時空点で独立にフレームを選んでもよいという要請は，おそらく直感的にももっともらしい要請であろう．そもそも，その場限りで好きに選んだフレームに物理がよるとすればそれは驚くべきことである．物理が局所的なフレームの選び方によらないということは，一般相対論の場合と事情がよく似ている．ただし，この場合は点 x^μ でのベクトル空間 V_x は任意の空間ではなく，この点における時空多様体の接空間で与えられる．

場の強さ $F_{\mu\nu}$ はリーマン曲率 $R^{ab}_{\mu\nu}$ のゲージ理論における対応物であり，時空 $\mathcal{M}$ の小さな閉曲線に沿って平行移動して戻ってきたときの角度の欠損と考えられる．ただし，ここで角度とは ψ の内部空間におけるフレームの回転角度を意味する．

共変的に一定な場 ψ，すなわち

$$D_\mu\psi=(\partial_\mu+A_\mu)\psi=0 \quad (10.27)$$

を考えると平行移動を解析できる．この方程式において，ψ は縦ベクトルであり，ゲージ場 A_μ に含まれる行列 t^a が通常の行列の積として作用する．そこで，$U(x)$ を次のように定義しよう．

$$(\partial_\mu+A_\mu)U(x)=0. \quad (10.28)$$

このような U は一般には $\mathcal{M}$ 上で（一価関数としては）存在しない．しかし，この方程式自体をある曲線 C に沿って積分することはできる．例えば，y^μ から x^μ まで積分し経路に依存する関数 $U(x,y,C)$ を求めることができる．これは，曲線 C に沿う接ベクトルを C^μ として，方程式 $C^\mu(\partial_\mu + A_\mu)U(x) = 0$ を解くことに対応する．そこで，次のような $U(x,y,C)$ を定義しよう．

$$
\begin{aligned}
U(x,y,C) &= [1 - A_{\mu_1}(x-\epsilon)\epsilon^{\mu_1}][1 - A_{\mu_2}(x-2\epsilon)\epsilon^{\mu_2}]\cdots[1 - A_{\mu_N}(y)\epsilon^{\mu_N}] \\
&= P\,\exp\left(-\int_{y\ C}^{x} A_\mu dx^\mu\right) \\
&= P\,\exp\left(i\int_{y\ C}^{x} t^a A^a_\mu dx^\mu\right). \qquad (10.29)
\end{aligned}
$$

ここで，P は行列 A_μ の順序をこの式の最初の行で展開したように経路に沿って順序づけることを意味する．まず，経路を微小な変位 ϵ^μ ベクトルに N 分割し，$[1 - A_\mu(x-\epsilon)\epsilon^\mu]$ のような順序づけられた積に展開する．その後で，全体の変位を有限に保ち積の順番を変えないようにしながら $\epsilon \to 0$, $N \to \infty$ の極限をとる．すると，1 行目から明らかなように，この $U(x,y,C)$ は式 (10.28) の解になる．この U が与えられると，方程式 $D_\mu\psi = 0$ は

$$
\psi = U\,\psi_0 \qquad (10.30)
$$

と解ける．ただし，ψ_0 は定数ベクトルである．つまり，$U(x,y,C)$ は曲線 C に沿って点 y から点 x まで移動したときフレームがどれだけ回転するかを示している．

方程式系 $D_\mu U = 0$（μ は異なる時空座標に対応）の可積分条件として，$F_{\mu\nu} = 0$ が得られる．$F_{\mu\nu} = 0$ を満たすときに限って，$U(x,y,C)$ が曲線 C の取り方にはよらず，空間 M の上で一価関数として与えられる．(もし M に可縮でない閉曲線があったとすると[1]，より一般的な解が存在する．ある開曲線 C に沿って積分された $U(x,y)$ の値は，この経路に可縮でない閉曲線を加えた経路に沿って積分されたものと同じである必要がない．というのも，これら 2 つの経路は連続変形によってつながっていないからである．単連結な

[1] ［訳註］その閉曲線に沿ってまわされた紐がほどけないとき，その閉曲線は可縮でない (non-contractable) と呼ばれる．

時空[2]では，可積分条件 $F_{\mu\nu} = 0$ は経路に依存しない関数 $U(x)$ を与える.）可積分条件 $F_{\mu\nu} = 0$ が満たされる場合，単連結な空間でゲージ場は

$$A_\mu = -(\partial_\mu U)\, U^{-1} \tag{10.31}$$

と書ける．もし $F_{\mu\nu} \neq 0$ であると，微小な閉曲線に対して

$$U = P \exp\left(-\oint_C A_\mu dx^\mu\right) \approx 1 - (F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) \tag{10.32}$$

となることがわかる．ここで，$\sigma^{\mu\nu}$ は曲線 C で囲まれる微小面の面積要素である.（この結果は，本質的にストークスの定理と同じである．しかし，閉曲線が大きくなると，A_μ が行列であり，一般に異なる点での行列が可換でないことから，この定理は成立しない．小さな閉曲線の場合は，経路順序に沿った指数関数を展開することでこの結果が得られる.）この結果 (10.32) と式 (10.30) から $F_{\mu\nu}$ が小さな閉曲線に沿った平行移動をしたときの（内部空間での）「欠損角」を測っていることがわかる．

式 $D_\mu U = 0$ を使うことで，ゲージポテンシャル A_μ をゲージ変換したとき $U(x, y, C)$ が

$$U(x, y, C, A^g_\mu) = g(x)\, U(x, y, C, A_\mu)\, g^{-1}(y) \tag{10.33}$$

と変換することが確認できる．閉曲線に対しては，x と y が一致し $U(x, x, C)$ は $g(x)$ による相似 (similarity) 変換を受けるので，そのトレースはゲージ不変となる．このとき，ホロノミー演算子もしくはウィルソン・ループ演算子 $W(C)$ は

$$\begin{aligned} W(C) &= \mathrm{Tr}\left[P \exp\left(-\oint_C A_\mu dx^\mu\right)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[P \exp\left(i \oint_C t^a A^a_\mu dx^\mu\right)\right] \end{aligned} \tag{10.34}$$

で定義される．

2 ［訳註］可縮でない閉曲線が存在しない時空のこと．

10.3 電荷とゲージ変換

ゲージ理論のラグランジアンはゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu^g = gA_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g)g^{-1}, \qquad \psi \to \psi^g = g\psi \tag{10.35}$$

のもとで不変である．まず，$g(x)$ が座標 x^μ によらない定数ゲージ変換を考えよう．これらの定数変換に対しては，ゲージ対称性は通常の大域対称性と同じである．

$$A_\mu \to A_\mu^g = gA_\mu g^{-1}, \qquad \psi \to \psi^g = g\psi. \tag{10.36}$$

よって，ネーターカレントとそれに付随する電荷（チャージ）を定義することができる．3 章で議論したように，ラグランジアンの変分を考えることによりカレントを作ることができる．例えば，物質場としてフェルミオンが A_μ と結合している場合を考えると，ラグランジアンの変分は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2e^2}F^{a\mu\nu}\delta F^a_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\delta\psi + \cdots \\ &= \partial_\mu\left[-\frac{1}{e^2}(F^{a\mu\nu}\delta A^a_\nu) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi\right] + (\text{運動方程式に比例する項})\end{aligned} \tag{10.37}$$

で与えられる．このとき，ネーターカレント $J^{a\mu}$ は

$$J^{a\mu}\theta^a = -\frac{1}{e^2}(F^{a\mu\nu}\delta A^a_\nu) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi \tag{10.38}$$

となることがわかる．ここで，θ^a は（無限小の）ゲージ変換パラメータである．式 (10.36) から $\delta A^a_\mu = -f^{abc}A^b_\mu\theta^c$, $\delta\psi = -it^c\theta^c\psi$ となるので，カレントは

$$J^{a\mu} = \frac{1}{e^2}f^{abc}F^{b\mu\nu}A^c_\nu + \bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi \tag{10.39}$$

となることがわかる．運動方程式を使うとこのカレントが保存することは簡単に示せる．ゲージ場の運動方程式

$$\frac{1}{e^2}(D_\mu F^{\mu\nu})^a = -\bar{\psi}\gamma^\nu t^a\psi \tag{10.40}$$

と共変微分の定義を使うと

$$J^{a\mu} = \partial_\nu\left[\frac{F^{a\mu\nu}}{e^2}\right] \tag{10.41}$$

と書ける．よって，これから得られる電荷は

$$Q^a = \int d^3x\, J^{a0} = \frac{1}{e^2}\oint_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} F^{a0i} dS_i \tag{10.42}$$

と書けることがわかる．この電荷は 2 次元面での積分で与えられる．これはすべてのゲージ理論で一般的な性質である.（例えば一般相対論では，漸近的に平坦な時空を考えると，一般座標変換に対応する電荷つまり運動量と角運動量は空間の無限遠における表面積分で定義される．これは一般に式 (10.39) からわかるように電荷密度がゲージ不変には定義できないことと関係している．また，式 (10.39) は物質場がないときでもゼロでない電荷が存在し得ることを示している点に注意しよう．つまり，非アーベル型ゲージ理論ではゲージ場自身が電荷をもっているのである.）

定数変換 (10.36) はネーター対称性として作用するので，波動関数もしくは状態は，次のように，この対称性の群の表現として変換することが期待される．

$$|\Psi^g\rangle = e^{iQ^a\theta^a}\,|\Psi\rangle. \tag{10.43}$$

これは以下のようにして示すことができる．ラグランジアンの一般的な変分は式 (10.37) で与えられる．この作用の表面項から正準 1-形式と呼ばれる量

$$\begin{aligned}\Theta &= \int d^3x\left[-\frac{1}{e^2}F^{a0i}\delta A_i^a + i\bar{\psi}\gamma^0\delta\psi\right]\\ &= \int d^3x\left[\frac{1}{e^2}F_{0i}^a\delta A_i^a + i\bar{\psi}\gamma^0\delta\psi\right]\end{aligned} \tag{10.44}$$

を読み取ることができる．この正準 1-形式からゲージ場の量子化に困難があることが見て取れる．つまり，A_0^a に共役な運動量が存在しないのである．しかしながら，電磁場の場合に見たように，ゲージを $A_0^a = 0$ とおくことができる．残りの成分に関しては，正準 1-形式 (10.44) から次の交換関係

$$\begin{aligned}&[A_i^a(\boldsymbol{x},t),\, A_j^b(\boldsymbol{y},t)] = 0,\\ &[A_i^a(\boldsymbol{x},t),\, \frac{1}{e^2}F_{0j}^b(\boldsymbol{y},t)] = i\delta^{ab}\delta_{ij}\delta^{(3)}(x-y),\\ &[F_{0i}^a(\boldsymbol{x},t),\, F_{0j}^b(\boldsymbol{y},t)] = 0\end{aligned} \tag{10.45}$$

が導かれる．また，フェルミオン場は通常の反交換関係をみたす．

電磁場の場合と同様に，ガウス則はラグランジアンから導かれる運動方程式の一部となっており，特別な取り扱いが必要である．これには時間微分が含まれていないため，ハミルトン形式では運動方程式として導くことができず，むしろ古典的な解析で許される初期データを選択する条件として考えなければならない．電磁場理論の量子論的な取り扱いの場合は，ガウス則を具体的に解いて A_i の縦波成分を除去し，拘束条件のない場だけの理論としてこれらに対して交換関係を使用した．ここでも同様に自由度を減らすことができるが，別の手法としてガウス則を物理的な状態に対する条件として要請する方法もある．縦波成分を除去すると，A_i は ψ と $\psi^\dagger$ を含む電荷密度で書けることを思い出そう．その結果として，これらの交換関係のなかで A_i の縦波成分が現れる部分はフェルミオン場を含むことになる．一方，ガウス則を状態に課すという手法では，交換関係が (10.45) で与えられ，そのため演算子の構造が簡単になるという利点をもつ．しかし，ヒルベルト空間には真空に A_i^a の縦波成分が作用した状態が含まれる．これらの状態は，明らかに非物理的な状態である．なぜなら，ガウス則を解いて縦波成分を除去したならば存在しない状態だからである．よって，この手法では，理論の物理的状態は次のガウス条件をみたす状態として定義されることになる．

$$G^a \,|\,\Psi\rangle = 0. \tag{10.46}$$

言い換えると，すべての状態に（演算子の恒等式として）$G^a = 0$ を課すのではなく，この条件をヒルベルト空間から物理的状態を選び出すための条件ととらえる．この条件 (10.46) は，ガウス則が物理的状態の間の行列要素に対して成立することを保証する．特に物理的状態でのゲージ不変な演算子の期待値に対して成立する．理論で観測できる物理的結果がガウス則と矛盾しないためには，これで十分である．

非アーベル型ゲージ理論では，ガウス則は次のように運動方程式の時間成分として考えることができる．

$$G(\theta) = \int d^3x\, \theta^a \left[\frac{1}{e^2}(D_i F^{i0})^a + \psi^\dagger t^a \psi\right]. \tag{10.47}$$

ここで，次の変換を考えよう．

$$\begin{aligned} \delta A_i^a &= -(D_i\theta)^a, \\ \delta\psi = -it^a\theta^a\psi\,, &\qquad \delta\psi^\dagger = \psi^\dagger it^a\theta^a. \end{aligned} \tag{10.48}$$

これは無限小ゲージ変換であるが，ゲージパラメータが空間の無限遠で消えることは要請しない．例えば，無限遠でゼロでない（角度方向によらない）定数になってもよい．正準交換関係から，この変換を生成する演算子は

$$\tilde{G}(\theta) = \int d^3x \left[\frac{1}{e^2}F^{a0i}(D_i\theta)^a + \theta^a\psi^\dagger t^a\psi\right] \tag{10.49}$$

で与えられることがわかる．（変換は $i\delta A_i^a = [A_i^a, \tilde{G}(\theta)]$ のように書ける．）この演算子 (10.49) はガウス演算子 (10.47) と表面項だけ異なっている．式 (10.48) の変換が状態に作用するとその変化分は

$$\delta|\Psi\rangle = i\tilde{G}(\theta)\,|\Psi\rangle \tag{10.50}$$

と書ける．つぎに，ガウス条件 (10.46) を満たす状態つまり物理的状態を考えよう．空間の無限遠でゼロでない定数になるような θ^a による変換に対しては，この状態の変化分を部分積分して

$$\begin{aligned} \delta|\Psi\rangle &= \frac{i}{e^2}\oint_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \theta^a F^{a0i} dS_i\,|\Psi\rangle \\ &= iQ^a\theta^a\,|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{10.51}$$

を得る．これは，このような定数変換は物理的状態に対するネーター対称性となり，その電荷演算子は (10.42) で与えられることを示している．空間の無限遠で θ^a がゼロになるようなゲージ変換に対しては表面項が現れず $G(\theta)$ と $\tilde{G}(\theta)$ が一致する．要請 (10.46) は物理的状態がそのような変換に対して不変であることを示している．

これまでの解析結果を簡単にまとめると，次のようになる．

1. 空間の無限遠で恒等変換つまり $\theta^a \to 0$ となる変換に対しては，物理的状態 $|\Psi\rangle$ は**不変**である．
2. 変換 $g(x)$ のうち，無限遠で恒等変換ではない定数変換 g_∞ となるもの，あるいは全空間で定数変換 g となるものについては

$$\delta|\Psi\rangle = iQ^a\theta^a\,|\Psi\rangle \tag{10.52}$$

が成り立つ．

この結果は次のように言い換えることもできる．まず

$$\mathcal{G}_* = \left\{ |\boldsymbol{x}| \to \infty \text{ で } g(x) \to 1 \text{ となる } g(x) \right\}$$

$$\mathcal{G} = \left\{ |\boldsymbol{x}| \to \infty \text{ で } g(x) \to (G \text{ の } 1 \text{ とは限らない定数要素}) \text{ となる } g(x) \right\}$$

を定義する．このとき，上の結果は次のように言える．物理的状態は $\mathcal{G}_*$ の変換のもとで（単に共変というだけでなく）**不変**である．つまり，$\mathcal{G}_*$ の要素は理論の非物理的状態それゆえ重複した変数を表しているという意味で「真のゲージ対称性」と言える．$\mathcal{G}$ の要素は空間の無限遠で恒等元とは限らない定数元へ漸近するので

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}_* \sim \text{定数元 } g \text{ 全体} \sim G$$

となり，$\mathcal{G}/\mathcal{G}_* \sim G$ は電荷によって定義されるこの理論のネーター対称性となる．

10.4　ゲージ理論の汎関数量子化

すでに 8 章で示したように，スカラー場とフェルミオン場については，生成汎関数を汎関数積分として導く簡単な処方がある．すなわち，古典的なユークリッド型の作用 $\mathcal{S}_E$ が与えられたとき，$Z[J,\bar{\eta},\eta]$ は

$$Z_E[J,\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int d\mu\left(\varphi,\psi,\bar{\psi}\right)\exp\left[-\mathcal{S}_E(\varphi,\bar{\psi},\psi)+\int d^4x(J\varphi+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right] \quad (10.53)$$

となる．ここで，$d\mu$ は配位空間の積分測度，つまり次の $\mathcal{C}$ で与えられる空間の測度である．

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi(x),\ \psi(x),\ \bar{\psi}(x)\ \middle|\ \phi(x):\mathcal{M}\to\mathbf{R},\ \psi(x),\bar{\psi}(x):\mathcal{M}\to\mathbf{N} \right\}.$$

ただし，$\mathbf{R}$ は実数，$\mathbf{N}$ はグラスマン数である．($d\mu$ を定義する上で使用された計量は $\mathcal{C}$ 上のユークリッド計量である．)

QED での汎関数積分は8章で求めたが，そこでは古典的なマクスウェル作用ではなく，むしろゲージ固定と関係した別の形の作用が使われた．以下では，配位空間とその体積測度を正しく定義することで，スカラー場やフェルミオン場で使われた手法が同様にゲージ場にも適用できることを示そう．

まず，すべての A_μ に対して積分を素朴に定義するとうまくいかないことを示す．そこで，次のユークリッド型のマクスウェル作用から始めよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int A^\mu\left(-\Box\delta_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\right)A^\nu \\ &= \frac{1}{2}\int_{x,y} A^\mu(x)M_{\mu\nu}(x,y)A^\nu(y).\end{aligned} \tag{10.54}$$

ただし，

$$M_{\mu\nu}(x,y) = \left(-\Box\delta_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\right)\delta^{(4)}(x-y) \tag{10.55}$$

である．スカラー場の場合は次のように書ける．

$$\begin{aligned}Z &= \int [d\varphi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int\varphi M\varphi + \int J\varphi\right) \\ &= \left(\det\frac{M}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int JM^{-1}J\right).\end{aligned} \tag{10.56}$$

ここで，M^{-1} は伝播関数である．ところが，マクスウェル作用の場合にはこれと同じ積分はできない．というのも，$M_{\mu\nu}(x,y)$ がゼロモードをもち（つまり $\det M = 0$），M^{-1} が存在しないからである．ゼロモードの存在はゲージ不変性 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$ のためである．$\phi_\mu = \partial_\mu\theta$ のように書けるモードに対して

$$\int_y M_{\mu\nu}(x,y)\phi^\nu(y) = \left(-\Box\phi_\mu + \partial_\mu\partial\cdot\phi\right) = 0 \tag{10.57}$$

が成立する．言い換えると，$\phi_\mu = \partial_\mu\theta$ が演算子 $M_{\mu\nu}(x,y)$ のゼロ固有値をもつ固有ベクトルになる．正しい汎関数積分を定義するには，このようなゲージ自由度つまり非物理的な自由度を A_μ 全体から取り除かなければならない．

この点をより正しく理解するには，配位空間をさらに注意深く定義しなければならない．これ以降はゲージ理論一般について議論しよう．というのも，ここでの議論は QED に対しても他のゲージ理論に対しても本質的に同じだからである．最初に，関数空間 $\mathcal{A}$ を全ゲージポテンシャルの空間として定義

する．これは 4 次元ベクトルの関数 $A_\mu(x)$ 全体を意味する．ただし，$A_\mu(x)$ はリー代数の要素でもある．また，$\int F^2$ のような積分が存在することは仮定する．汎関数積分において $[dA]$ と書く場合，これは $\prod_{x,\mu,a} dA^a_\mu(x)$ で定義された $\mathcal{A}$ 上の測度を意味する．これは $\mathcal{A}$ 上のユークリッド距離関数もしくは計量で定義された体積に対応し，

$$\| \delta A \|^2 = \int d^4x \; \delta A^a_\mu(x) \delta A^a_\mu(x) \tag{10.58}$$

で与えられる．

空間 $\mathcal{A}$ は，任意の 2 点 $A_{1\mu}(x)$ と $A_{2\mu}(x)$ が直線で結ばれるという性質をもつ．実際に，この直線は $0 \leq \tau \leq 1$ をパラメータとする線分

$$A_\mu(\tau, x) = \tau\, A_{1\mu}(x) + (1-\tau)\, A_{2\mu}(x) \tag{10.59}$$

で与えられる．$A_\mu(\tau, x)$ がすべての τ に対してゲージポテンシャルとして変換すること，すなわち $g = e^{-it^a\theta^a}$ に対して $A^g_\mu(\tau, x) = \tau\, A^g_{1\mu}(x) + (1-\tau)\, A^g_{2\mu}(x)$ と変換することに注意しよう．よって，$\mathcal{A}$ はアフィン空間である．つまり，任意の配位 A_μ を $A_\mu(x) = A^{(0)}_\mu + \xi_\mu$ と表すことができる．ここで，$A^{(0)}_\mu$ はある固定されたポテンシャル，$\xi_\mu(x)$ はリー代数に値をとるベクトル場である．

前節でゲージ変換の集合 $\mathcal{G}_*$ を定義し，この変換のもとで作用のみならず波動関数も不変であることを示した．この空間 $\mathcal{G}_*$ はある決まった時間でのゲージ変換として定義したが，これは状態やそこに作用する演算子を議論するのに適切であった．汎関数積分にこの考えを拡張するには，4 次元的な一般化が必要となる．以下では同じ記号 $\mathcal{G}_*$ を，4 次元ユークリッド空間の意味での半径が大きな場所つまり $\sqrt{x^\mu x^\mu} \to \infty$ で恒等的になるゲージ変換全体の意味で使う．経路積分で積分すべき物理的な配位は $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ で定義される．ゲージ変換の差しかない 2 つのゲージポテンシャルつまり $\mathcal{G}_*$ の要素は物理的に同じものであり，$\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の空間では同じ点に対応する．言い換えると，$\mathbf{R}^4$ 上の物理的に意味をもつ配位空間は $\mathcal{A}$ ではなく

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \tag{10.60}$$

である．

(10.60) の配位空間 $\mathcal{C}$ をもちいると，ゲージ理論の正しい汎関数積分は次式で与えられる．

$$Z = \int d\mu \left(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*\right) e^{-\mathcal{S}_E + \int J^{a\mu} A^a_\mu}. \tag{10.61}$$

ただし，$\mathcal{S}_E$ は古典ユークリッド作用であり，$d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)$ は (10.58) で定義された計量からゲージ変換で同一視される部分を分離することで得られる．

式 (10.61) は確かに正しい処方箋ではあるが，実際には測度 $d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)$ を正確に評価することは難しい．(2 次元のゲージ場の場合にはこれが実行できる.) 測度を求める 1 つの方法は，以下のとおりである．(この方法には多くの補足が必要であり，配位空間の大域的な性質を議論する場合には注意する必要がある．いまはこれらの問題は忘れ，後で個別に取り扱う.) まず，$\mathcal{A}$ のなかの 1 点 $A_\mu(x)$ を考えよう．ゲージ変換 $A_\mu \to A^g_\mu = gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}$ のもとでこの点は $\mathcal{A}$ のなかの別の点に変換される．$g=1$ から出発してこの変換による点の列を考えると，ゲージ変換は空間 $\mathcal{A}$ に 1 つの流れを生成することがわかる．ゲージ自由度を除去するためには，こうして生成されたいくつもの流れを横切る面 Σ を選ぶことである．(Σ が「よい」面であるためには，面がどの流れともただ 1 点で必ず交わる必要がある.) すると $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の代表的な要素として Σ の上の点を選ぶことができる．面 Σ の選び方はゲージポテンシャルに対する条件で指定され，ゲージ固定条件と呼ばれる．例えば，$\partial_\mu A^{a\mu} = 0$ を満たすすべての A はある面上 $\Sigma_{\partial \cdot A}$ にあり，また別の条件 $f^a(A) = 0$ を満たすすべての A は面 Σ_f の上にある．もし古典作用のように被積分関数がゲージ不変であれば，どのような Σ を選んでも問題はない．なぜなら，ある面 Σ から別の面へはゲージ変換で移れるからである．

つぎに，積分測度 $d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)$ を求めよう．$\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の定義から，少なくとも局所的には $\mathcal{A} \sim (\mathcal{A}/\mathcal{G}_*) \times \mathcal{G}_*$ である．よって，

$$[dA] = d\mu\left(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*\right) d\mu(\mathcal{G}_*) \tag{10.62}$$

と書ける．恒等変換に近いゲージ変換つまり $g(x) \approx 1 - it^a\theta^a(x)$ のときは，$d\mu(\mathcal{G}_*) \approx [d\theta^a(x)]$ と書ける．いま，ゲージ固定条件を

$$f^a(A) - h^a(x) = 0 \tag{10.63}$$

としてみよう．ただし，$h^a(x)$ は A にはよらないとする．両辺に共通の因子をかけて式 (10.62) を

$$[dA]\left|\det\left[\frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right]\right| = d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)\,[d\theta]\left|\det\left[\frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right]\right| \tag{10.64}$$

と書き換える．この行列式

$$\Delta_{FP}^{ab}(x,y) = \delta f^a(x)/\delta\theta^b(y) \tag{10.65}$$

はファデーエフ–ポポフ (Faddeev–Popov) 行列式として知られている．式 (10.64) に $\exp\left(-\mathcal{S}_E(A) + \int J^{a\mu}A^a_\mu\right)\delta[f(A)-h]$ をかけて積分をする．ただし，δ 関数は汎関数の意味での δ 関数である．すると，

$$\begin{aligned}
&\int [dA]\,\delta[f(A)-h]\ |\det(\Delta_{FP})|\ \exp\left(-\mathcal{S}_E(A) + \int J^{a\mu}A^a_\mu\right)\\
&\quad = \int d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)\ \exp\left(-\mathcal{S}_E(A) + \int J^{a\mu}A^a_\mu\right)\\
&\qquad\qquad \times\left\{[d\theta]\,|\det(\Delta_{FP})|\,\delta[f-h]\right\}\\
&\quad = \int d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)\ \exp\left(-\mathcal{S}_E(A) + \int J^{a\mu}A^a_\mu\right)
\end{aligned} \tag{10.66}$$

となる．ここで，ゲージ方向に沿った積分に対する恒等式

$$\int [d\theta]\,|\det(\Delta_{FP})|\,\delta[f-h] = \int [df]\,\delta[f-h] = 1 \tag{10.67}$$

を使った．式 (10.66) の右辺は正しい配位空間上の汎関数積分の定義式 (10.61) そのものである．よって，

$$Z_h[J] = \int [dA]\,\delta[f(A)-h]\ |\det(\Delta_{FP})|\exp\left(-\mathcal{S}_E(A) + \int J^{a\mu}A^a_\mu\right) \tag{10.68}$$

となる．これはユークリッド測度 $[dA]$ を使って書かれた便利な形をしており，余分なゲージ自由度は δ 関数を使うことで分離されている．厳密に言うと，$Z_h[J]$ はゲージ固定条件によっており，それを明確にするために h の添え字をつけた．経路積分の測度 $d\mu(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*)$ を $f-h=0$ を満たす面の上のゲージポテンシャル A を使って書くことは被積分関数がゲージ不変であるときにのみ正しい．$J^{a\mu}A^a_\mu$ の項はこれをみたさず，$Z_h[J]$ はゲージ固定条件に

よる．もちろん，$Z[0]$ はゲージ不変である．このことは $Z_h[J]$ から作られるグリーン関数は一般にゲージに依存することを意味している．しかし，S 行列の要素はゲージにはよらず，(10.68) は以下に見るようにさらに変形できる．h は任意関数であるので，S 行列は Z_h からでも，異なる関数 h' を使った $Z_{h'}$ からでも，さらには関数について平均化した $\int[dh]F(h)Z_h$ からでも定義でき，すべてが等価である．よって，S 行列を計算するために，以下では $F(h)=\exp(-\frac{1}{2e^2\alpha}\int h^2)$ という重みをつけて平均化した新たな Z を定義しよう．ただし，α は実数とする．

$$Z[J]=\int[dA]\,\delta[f(A)-h]\,|\det(\Delta_{FP})|\exp\left(-\mathcal{S}_E(A)+\int J^{a\mu}A^a_\mu\right)\\ \times[dh]\exp\left(-\frac{1}{2e^2\alpha}\int_x h^2(x)\right)\\ =\int[dA]\,|\det(\Delta_{FP})|\exp\left(-\mathcal{S}_E(A)-\frac{1}{2e^2\alpha}\int f^2(A)+\int J^{a\mu}A^a_\mu\right). \tag{10.69}$$

δ 関数の部分は（h 積分で）消去され，その代わりに作用には f^2 という新たな項が付け加わっている．つぎに，摂動計算をするのに便利なもう 1 つの変形をしよう．グラスマン積分の性質から，独立なグラスマン変数 $Q(x),\bar{Q}(x)$ について

$$\int[dQd\bar{Q}]\,e^{\int\bar{Q}MQ}=\det M \tag{10.70}$$

が成立する．これを使って

$$|\det(\Delta_{FP})|=\int[dcd\bar{c}]\exp\left(-\int_{x,y}\bar{c}^a(x)\Delta^{ab}_{FP}(x,y)c^b(y)\right) \tag{10.71}$$

と書ける．行列式は正であるとしたが，これは古典的な真空 $A_\mu=0$ の周辺の領域では正しい．（いずれにしても，これから導く表式はそのままでは非摂動的効果の議論には適用できないので，ここで $A_\mu=0$ のまわりで考えることはそれほど問題ではない．）この等式は大変便利な書き換えで，行列式を新たに加えられた（リー代数に値をとる）場 c^a と $\bar{c}^a$ の作用に置き換えている．これは摂動論のファインマン図を書き下す際にとても役に立つものである．c^a と $\bar{c}^a$ はグラスマン変数の場であるが，スピノールではなくスカラー場である．それゆえ，スピンと統計性の通常の関係を破っている．これらはファ

デーエフ–ポポフ・ゴースト場と呼ばれる．スピンと統計性の関係と矛盾していることは，ゴースト場の場合には問題とはならない．というのも，この場は決して外線もしくは理論の漸近状態として現れることはなく，単に行列式を便利な方法で書き換えるための道具として導入されたにすぎないからである．(10.71) を (10.69) に代入すると，最終的に

$$Z[J] = \int [dAdcd\bar{c}] \exp\left(-\mathcal{S}_q + \int J^{a\mu} A^a_\mu\right) \tag{10.72}$$

を得る．ここで，

$$\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_E(A) + \int d^4x \left[\frac{1}{2e^2\alpha} f^a(A) f^a(A) + \bar{c}^a(x) \left(\frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right) c^b(y)\right] \tag{10.73}$$

である．よって，最終的に得られたゲージ理論における汎関数積分の処方箋はきわめて簡単なものとなった．まず，ゲージ固定関数 $f^a(A)$ を選ぶ（これは定義によりゲージ不変とはなりえない）．つぎに，古典作用に f^2 項とファデーエフ–ポポフのゴースト項を付け加えて $\mathcal{S}_q$ を作る．最後に，被積分関数 $e^{-\mathcal{S}_q}$ を A_μ, c, $\bar{c}$ に対する標準的なユークリッド測度で積分することで $Z[J]$ の汎関数積分表式が得られる．

ここで何が「よい」ゲージ固定なのかという問いに答えなければならない．以前に注意したように，よいゲージ固定条件とはゲージ変換で生成されたすべての流れと 1 回だけ交差するような面を構成することである．このような面が存在するかどうかは $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の大域的な性質による．もし面が流れを横切るように選ばれていないとすると，f^a が不変となるゲージ変換の方向が現れてしまう．これは，行列 $\Delta^{ab}_{FP}(x,y)$ がゼロモードをもち，f^a の選び方によってゲージが完全に固定されないことを意味する．この問題は，配位空間 $\mathcal{A}$ において $A_\mu = 0$ となる点のまわりで，少なくとも局所的に，異なる関数を選び $\det \Delta_{FP} \neq 0$ とすることで解決できる．

より難しい問題は，ゲージ固定条件を決める面が流れを 2 回以上横切る可能性である．このときにはゲージ固定面の上にゲージ同値な配位が複数あることになり，次の方程式に対する非自明な解 $g(x)$ が存在する．

$$f^a(A^g) - h = 0. \tag{10.74}$$

（この場合 A と A^g が同じゲージ固定面にある.）言い換えると，大域的な配位空間において，ゲージの流れと 1 回だけ必ず交差するような面は存在しない．ある面の上のすべての点について積分をとると自由度を数えすぎることとなる．この問題はグリボフ問題として知られている．大まかに言ってゲージの流れがゲージ固定面を通りすぎた後にまた折れ曲がって戻り再び面と交わっているので，流れに沿ったある A において $\delta f/\delta\theta$ がゼロになることがわかる．つまり，ファデーエフ–ポポフ演算子 Δ_{FP} がこの点でもう 1 回ゼロモードをもつことになる．QED のような可換ゲージ理論では，グリボフの問題は簡単に避けることができる．しかし，非アーベル型ゲージ理論の場合にはなめらかなゲージ固定条件をどのようにとっても，配位空間 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ のもつ大域的な性質のために，この問題は避けることができない.（この点については 14 章でより詳しく議論する.）もし $\partial_\mu A^{a\mu}=0$ のようなゲージ固定条件を考えるのであれば，Δ_{FP} は点 $A_\mu=0$ では正の値をとり，この点のまわりで摂動的に取り扱える範囲の A に対してはやはり正であり続ける．この意味でグリボフの問題は，汎関数積分 (10.72), (10.73) を使った摂動計算にはまったく影響を与えない.

10.5　具体例

1. 量子電磁力学：$f(A)=\partial_\mu A^\mu$ の場合.

$f(A)=\partial_\mu A^\mu$ と選ぶと，$\Delta_{FP}=-\Box_x\delta^{(4)}(x-y)$ である．よって，作用は

$$\mathcal{S}_q=\int\left[\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2e^2\alpha}(\partial\cdot A)^2+\bar{c}(-\Box)c\right] \tag{10.75}$$

となる．$\alpha=1$ と選ぶと（さらに，$A\to eA$ と再定義しフェルミオン項も付け加えると）以前に得た QED の汎関数積分の表式 (8.57), (8.58) が得られる．ゴースト $c,\bar{c}$ に依存する項は単に汎関数積分の値を $\det(-\Box)$ だけ定数倍するだけなので，規格化因子に吸収できる．$\alpha\to 0$ とする極限はランダウゲージとして知られる.

QED に対する汎関数積分がこのようにして得られるということは，S 行列を計算するのに共変的な光子の伝播関数を使うことが正当であることを示している.

2. 量子電磁力学：$f(A) = \partial_\mu A^\mu + A_\mu A^\mu$ の場合.

量子電磁力学における非線形なゲージの取り方の簡単な例として，$f(A) = \partial_\mu A^\mu + A_\mu A^\mu$ がある．この場合，$\Delta_{FP} = -(\Box_x + 2A\cdot\partial)\delta^{(4)}(x-y)$ であり，よって，

$$\mathcal{S}_q = \int \left[\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2e^2\alpha}(\partial\cdot A + A^2)^2 + \bar{c}(-\Box - 2A\cdot\partial)c \right] \quad (10.76)$$

となる．この場合にはゴースト場は光子と相互作用し無視することができない．

3. 非アーベル型ゲージ理論：$f^a = \partial_\mu A^{a\mu}$ の場合.

ゲージ条件 $f^a = \partial \cdot A^a$ より，$\Delta^{ab}_{FP}(x,y) = -(\partial_\mu D^\mu)^{ab}\delta^{(4)}(x-y)$ となる．ただし，D_μ は（随伴表現における）共変微分である．このとき，$\mathcal{S}_q$ は

$$\mathcal{S}_q = \int \left[\frac{1}{4e^2} F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2e^2\alpha}(\partial\cdot A^a)^2 + \partial^\mu \bar{c}^a(\partial_\mu c^a + f^{abc}A^b_\mu c^c) \right] \quad (10.77)$$

となる．$\alpha = 1$ と選び，$A \to eA$ と再定義すると

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{int}, \\
&\mathcal{S}_0 = \int \left[\frac{1}{2}\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} + \partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a \right], \qquad (10.78) \\
&\mathcal{S}_{int} = \int \left[ef^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{b\mu}A^{c\nu} + \frac{e^2}{4} f^{abc}f^{ars}A^b_\mu A^c_\nu A^{r\mu}A^{s\nu} + ef^{abc}\partial_\mu \bar{c}^a A^b_\mu c^c \right]
\end{aligned}$$

となる．この場合，ゲージ固定条件はゲージ場に対して線形であるが，ゴースト場はゲージ場と相互作用するため除去できない．式 (10.78) からファインマン図作成のための規則を読み取ることができる．特に，ゲージ場とゴースト場の（ユークリッド化された）伝播関数は

$$\begin{aligned}
\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle &= \delta_{\mu\nu}\delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2}\,e^{ik(x-y)}, \\
\langle c^a(x)\bar{c}^b(y)\rangle &= \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2}\,e^{ik(x-y)}
\end{aligned} \qquad (10.79)$$

で与えられる．

10.6　BRST 対称性と物理的状態

この節では，ゲージ場の量子論で特徴的な演算子形式の性質について議論しよう．汎関数積分は，式 (10.73) で与えられるように，古典作用とは異なる形をしている．この新しい形の作用で正準量子化を行えば，理論の物理的状態を導くことができるはずである．この考え方に沿って，物理的状態を理解し，さらにゲージ自由度の除去を理解するエレガントな方法として，いわゆる BRST 対称性をもちいる手法がある．この対称性はベッキ (Becchi)，ルウェ(Rouet)，ストラ (Stora) およびトゥーティン (Tyutin) にちなんで名づけられたものである．まず，少し戻って作用 (10.73) を

$$\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_E(A) + \int \left[iB^a f^a + \frac{\alpha e^2}{2} B^a B^a + \bar{c}^a(x) \left(\frac{\delta f^a(x)}{\delta \theta^b(y)} \right) c^b(y) \right] \tag{10.80}$$

と書き換えよう．ただし，$B^a(x)$ は新たに導入された補助場である．運動方程式

$$\alpha e^2 B^a = -if^a \tag{10.81}$$

を使ってこの場を消去する，もしくは B^a を通常のユークリッド測度 $[dB]$ を使って汎関数積分すると，再び作用 (10.73) が得られる．

ここで，BRST 変換を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\, A^a_\mu &= (D_\mu c)^a, \\ \mathcal{Q}\, c^a &= -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c, \\ \mathcal{Q}\, \bar{c}^a &= iB^a, \\ \mathcal{Q}\, B^a &= 0. \end{aligned} \tag{10.82}$$

A^a_μ の変換にはゴースト場が含まれる．この意味で $\mathcal{Q}$ はグラスマン的な変換であり，変換のパラメータはグラスマン変数であるとみなされなければならない．変換 (10.82) を書き下すのは簡単である．ゲージ場 A^a_μ については，無限小ゲージ変換 $A^a_\mu \to A^a_\mu - (D_\mu \theta)^a$ を行い，ゲージパラメータ $(-\theta^a)$ をゴースト場 c^a で置き換えればよい．これはまたゲージ不変量は BRST 不変であることを意味する．ゲージ理論のすべての観測可能量はゲージ不変でなければならないので，すべての観測可能量は BRST 不変量として与えられる．$\mathcal{Q}$

のゲージ場 A_μ^a に対する作用が特定されれば，ゴースト場 c^a に対する Q の作用は，(10.82) で与えられているように，$\mathcal{Q}^2 = 0$ を要請することで決めることができる．これは，次のようにして簡単に確かめられる．

$$\mathcal{Q}^2 A_\mu^a = \partial_\mu(\mathcal{Q}c^a) + f^{abc}(\partial_\mu c^b)c^c + f^{abc}A_\mu^b(\mathcal{Q}c^c) + f^{abc}f^{bkl}A_\mu^k c^l c^c. \tag{10.83}$$

そこで，$\mathcal{Q}c^a + \frac{1}{2}f^{abc}c^b c^c = 0$ と選び，ゴースト場がグラスマン数であるという性質をもちいて

$$f^{abc}(\partial_\mu c^b)c^c = \frac{1}{2}\partial_\mu(f^{abc}c^b c^c) \tag{10.84}$$

と書き換えると，

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^2 A_\mu^a &= -\frac{1}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{ckl}c^k c^l + f^{abc}f^{bkl}A_\mu^k c^l c^c \\ &= -\frac{1}{2}\left[f^{abc}f^{ckl} - f^{cak}f^{cbl} - f^{cal}f^{ckb}\right] A_\mu^b c^k c^l \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10.85}$$

となることがわかる．ただし，構造定数に関するヤコビの恒等式

$$f^{cab}f^{ckl} + f^{cal}f^{cbk} + f^{cak}f^{clb} = 0 \tag{10.86}$$

をもちいた．このヤコビの恒等式は，リー代数の（行列）恒等式

$$[t^b, [t^k, t^l]] + [t^k, [t^l, t^b]] + [t^l, [t^b, t^k]] = 0 \tag{10.87}$$

に交換関係 (10.10) を使うと証明できる．同様に，$\mathcal{Q}c^a + \frac{1}{2}f^{abc}c^b c^c = 0$ と選ぶと，やはりヤコビの恒等式を使うことで，$\mathcal{Q}^2$ のゴースト場 c^a への作用がゼロとなることが確かめられる．反ゴースト場 $\bar{c}^a$ に $\mathcal{Q}$ を作用させるとボソン場となるはずである．これを単純に iB^a と定義しよう．よって，$\mathcal{Q}\,B^a$ がゼロとなるように選ぶと，$\bar{c}^a$ に対して $\mathcal{Q}^2 = 0$ となる．また，B^a に対して $\mathcal{Q}^2 = 0$ となることは自明である．

BRST 変換 (10.82) を使うと

$$\mathcal{Q}\left[\bar{c}^a f^a(A) - i\frac{\alpha e^2}{2}\bar{c}^a B^a\right] = iB^a f^a + \frac{\alpha e^2}{2}B^a B^a + \bar{c}^a\left(\frac{\delta f^a}{\delta\theta^b}\right)c^b \tag{10.88}$$

であることがわかる．よって，汎関数積分にもちいる変形された作用 (10.80) は

$$\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_E(A) + \int \left[iB^a f^a + \frac{\alpha e^2}{2} B^a B^a + \bar{c}^a(x) \left(\frac{\delta f^a(x)}{\delta \theta^b(y)} \right) c^b(y) \right]$$
$$= \mathcal{S}_E(A) + \mathcal{Q} \int \left[\bar{c}^a \left(f^a - i\frac{\alpha}{2} B^a \right) \right] \tag{10.89}$$

と表せる．A^a_μ に対する $\mathcal{Q}$ の作用はゲージパラメータを $-c^a$ とした無限小ゲージ変換で表せることおよび $\mathcal{S}_E$ がゲージ不変であることから，

$$\mathcal{Q}\, \mathcal{S}_q = 0 \tag{10.90}$$

となることがわかる．ただし，$\mathcal{Q}^2 = 0$ をもちいた．ゲージ固定された作用 $\mathcal{S}_q$ が BRST 不変であることは，理論がゲージ不変であることを表している．

BRST 不変性から，保存カレントと電荷を導くことができる．簡単のため，$f^a = \partial \cdot A^a$ となるゲージ固定項を選ぼう．ミンコフスキー空間で $\mathcal{S}_q$ に対応するラグランジアンは次のように書ける．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F^2 + iB^a \partial^\mu A^a_\mu + \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{\alpha e^2}{2} B^a B^a. \tag{10.91}$$

このラグランジアンの変分は

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu \left[-\frac{1}{e^2} F^{a\nu}_\mu \delta A^a_\nu + iB^a \delta A^a_\mu + \delta\bar{c}^a (D_\mu c)^a + \partial_\mu \bar{c}^a \delta c^a \right]$$
$$+ (\text{運動方程式に比例する項}) \tag{10.92}$$

となる．BRST 変換を施すと式 (10.91) の $\mathcal{L}$ は $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu = \partial_\mu [iB^a (D^\mu c)^a]$ と変化する．3 章で学んだネーターカレントに対する一般式と変換則 (10.82) を使うと，ネーターカレントを読み取ることができ

$$J_\mu = -\frac{1}{e^2} F^{a\nu}_\mu (D_\nu c)^a + iB^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c \tag{10.93}$$

となることがわかる．これを示すには変換がグラスマン的であることが重要である．すなわち，変換 $\mathcal{Q}$ に対するグラスマン変数のパラメータを導入し，このパラメータを $\delta\mathcal{L}$ のすべての項の一番左まで移動させ，カレントを求めればよい．(10.93) に対応する電荷は

$$Q = \int d^3x \left[\frac{1}{e^2} F^a_{0i} (D_i c)^a + iB^a (D_0 c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_0 \bar{c}^a c^b c^c \right] \tag{10.94}$$

で与えられる．(ここでは，正準的な電荷を Q で表し，汎関数形式での BRST

変換に対応する電荷を Q で表す.）ラグランジアン (10.91) より，正準 1-形式は

$$\Theta = \int d^3x \left[\frac{1}{e^2} F^a_{0i} \delta A^a_i + iB^a \delta A^a_0 + \delta \bar{c}^a (D_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a \delta c^a \right] \qquad (10.95)$$

で与えられる．(10.45) で与えられた A^a_i, F^a_{0j} に対する交換関係以外に，Θ から次の非自明な交換関係が得られる．

$$\begin{aligned} [A^a_0(\boldsymbol{x},t),\, iB^a(\boldsymbol{y},t)] &= i\delta^{ab}\delta^{(3)}(x-y), \\ \{c^a(\boldsymbol{x},t),\, \partial_0 \bar{c}^b(\boldsymbol{y},t)\} &= i\delta^{ab}\delta^{(3)}(x-y), \\ \{\bar{c}^a(\boldsymbol{x},t),\, (D_0 c)^b(\boldsymbol{y},t)\} &= -i\delta^{ab}\delta^{(3)}(x-y). \end{aligned} \qquad (10.96)$$

これから，(10.94) で定義される Q が BRST 変換の正準な生成子であることが直ちにわかる．つまり，

$$\varphi Q \pm Q \varphi = -i\,\delta\varphi \qquad (10.97)$$

が成り立つ．ここで正の符号あるいは反交換関係はフェルミオン場 $\varphi = \bar{c}, c$ に，また負の符号あるいは交換関係はボソン場 $\varphi = A_\mu, B$ に適用される．この正準形式においても $Q^2 = 0$ が同様に確かめられる．

この理論の量子化に際して，各種の場を生成部分と消滅部分に（もしくは負の振動数部分と正の振動数部分に）分離する必要がある．すると，状態は真空に生成演算子（負の振動数部分に対応）を何回かかけることで構成される．ゴーストを含む状態は $c^{a(-)}$ を何回もかけることで得られる．ここではゴースト数という概念が非常に有用な概念となる．ラグランジアンは χ を定数としたとき，$c \to e^{i\chi}c,\ \bar{c} \to e^{-i\chi}\bar{c}$ の変換で不変である．これに対応する電荷は

$$Q_{gh} = \int d^3x\ [-\bar{c}^a (D_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a c^a] \qquad (10.98)$$

で与えられる．

ここで，再び電磁力学を例にとって考えてみよう．このときは，ゴースト場の BRST 変換はゼロ ($Qc = 0$) である．よって，ゴースト数は簡単に

$$Q_{gh} = \int d^3x\ [-\bar{c}^a (\partial_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a c^a] \qquad (10.99)$$

となる．

つぎに，電磁力学の物理的状態 $|\Psi\rangle$ が次の条件で指定されることを示そう．

$$\begin{aligned} Q\,|\Psi\rangle &= 0, \\ Q_{gh}\,|\Psi\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{10.100}$$

あとで見るように，ここでも状態 $|\Psi\rangle$ と $|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + Q\,|\lambda\rangle$ とは等価であり，よって $Q\,|\lambda\rangle$ の形で表せない状態を考えればよい．言い換えると，物理的状態は Q と Q_{gh} をかけて消滅する状態であるが，それ自身はある状態 $|\lambda\rangle$ をもちいて $Q\,|\lambda\rangle$ と表せない状態であるということになる．（$Q\,|\lambda\rangle$ と表せる任意の状態は，$Q^2 = 0$ のために Q をかけると消滅することに注意しよう．）ここで，$Q\xi = c$ で定義される場 ξ を導入する．この場 ξ は A_i のゲージ自由度，つまりゲージ変換で不変ではない A_i の部分である．すなわち，$A_i = A_\mu^T + \partial_i \xi$ と書ける．ただし，A_μ^T は $\partial_i A_i^T = 0$ をみたす．場 ξ, B, $\bar{c}$, c は「カルテット（4 重項）」を成し,「非物理的な」場である．これらの演算子の負の振動数部分を状態に作用させると,「非物理的な」粒子をもつ状態を作る．場 $\partial_i F_{0i}$, A_0, $\partial_0 c$, $\partial_0 \bar{c}$ は，カルテットの正準共役量に関係しており，それゆえカルテット演算子の正の振動数部分に関係している．以下では，物理的状態を帰納的に構成していく．まず,「非物理的な」粒子を与えられた数だけ含むようなある状態から始め，この状態により多くの数の「非物理的な」粒子が含まれるような状態を構成し，その状態が条件 (10.100) をみたすことを要請する．ここで，状態 $|\Psi\rangle$ をこのような「非物理的な」粒子を N 個含むある状態であるとすると，この状態は

$$|\Psi\rangle = \Big(B^{(-)}\,\mathcal{O}_1 + \xi^{(-)}\,\mathcal{O}_2 + \bar{c}^{(-)}\,\mathcal{O}_3 + c^{(-)}\,\mathcal{O}_4\Big)\,|\sigma\rangle \tag{10.101}$$

と書ける．ただし，$\mathcal{O}_i$ はある適当な演算子で，$|\sigma\rangle$ は N 個未満の「非物理的な」粒子をもつ状態であるとする．さらに，$|\sigma\rangle$ に対して条件 (10.100) を要請しよう．いま，$|\Psi\rangle$ に対しても同じ条件 (10.100) を要請すると

$$\begin{aligned} Q\,|\Psi\rangle &= \Big[B^{(-)}(Q\mathcal{O}_1) + c^{(-)}\mathcal{O}_2 + \xi^{(-)}(Q\mathcal{O}_2) + iB^{(-)}\mathcal{O}_3 \\ &\qquad\qquad -\bar{c}^{(-)}(Q\mathcal{O}_3) - c^{(-)}(Q\mathcal{O}_4)\Big]\,|\sigma\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10.102}$$

となる．ここで，$Q\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の BRST 変換による変化量を表す．よって，これは Q と $\mathcal{O}$ の交換関係あるいは反交換関係で書ける．式 (10.102) から，一般的に次の関係式

$$
\begin{aligned}
&Q\,\mathcal{O}_1 = -i\mathcal{O}_3, \qquad &&Q\,\mathcal{O}_3 = 0,\\
&Q\,\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_2, &&Q\,\mathcal{O}_2 = 0
\end{aligned}
\tag{10.103}
$$

が要請される．これらの式の解は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1 = \xi^{(-)}\mathcal{O} + \rho_1, \qquad &&\mathcal{O}_3 = i\,c^{(-)}\mathcal{O},\\
&\mathcal{O}_4 = \bar{c}^{(-)}\tilde{\mathcal{O}} + \rho_4, &&\mathcal{O}_2 = i\,B^{(-)}\tilde{\mathcal{O}}
\end{aligned}
\tag{10.104}
$$

と書ける．これらの解はゴースト数をゼロとすることと整合的である．ここで，$\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ はゴースト数ゼロの演算子でありBRST 不変である．ρ_1，ρ_4 もまた BRST 不変な演算子である．この解を使うと

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle = &\left[\left(B^{(-)}\xi^{(-)} + i\bar{c}^{(-)}c^{(-)}\right)\mathcal{O} + \left(i\xi^{(-)}B^{(-)} + c^{(-)}\bar{c}^{(-)}\right)\tilde{\mathcal{O}}\right]|\sigma\rangle\\
&+ (B^{(-1)}\rho_1 + c^{(-1)}\rho_4)\,|\sigma\rangle
\end{aligned}
\tag{10.105}
$$

と書ける．$B^{(-)}\xi^{(-)} + i\bar{c}^{(-)}c^{(-)} = Q(-i\bar{c}^{(-)}\xi^{(-)})$ となること，および $(B^{(-1)}\rho_1 + c^{(-1)}\rho_4) = Q(-i\bar{c}^{(-)}\rho_1 + \xi^{(-)}\rho_4)$ であることを使うと，ある状態 $|\lambda\rangle$ をもちいて

$$
|\Psi\rangle = Q\,|\lambda\rangle \tag{10.106}
$$

と表せることが言える．よって，この議論を再帰的に使うことで,「非物理的な粒子」を含み条件 (10.100) を満たすすべての状態は，$Q\,|\lambda\rangle$ と書けることが示せる．Q は自己共役演算子であるので，これらの状態はゼロノルム状態，つまり

$$
\|\,Q\,|\lambda\rangle\,\| = \langle\lambda|Q^2|\lambda\rangle = 0 \tag{10.107}
$$

となる．これらのゼロノルム状態は，BRST 不変な任意の演算子で表される物理的な状態でラベルされる行列要素に寄与しない．つまり，$Q|\Psi\rangle = 0$ を使うと

$$
\langle\Psi_1|\mathcal{O}\,Q\,|\lambda\rangle = \langle\Psi_1|Q\,\mathcal{O}\,|\lambda\rangle = 0 \tag{10.108}
$$

となる．特に，これらの状態はハミルトニアンによる時間発展で構成される

S 行列に寄与しない．ハミルトニアンはBRST不変であり，時間発展は物理的状態のBRST不変性を保つ．また，状態 $|\Psi\rangle$ と状態 $|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + Q|\lambda\rangle$ は等価である．(実際，$|\Psi\rangle$ から $|\Psi'\rangle$ へ移ることは，ヒルベルト空間でのゲージ変換，もしくはBRST変換である．）よって条件(10.100)は満たすが，ある状態 $|\lambda\rangle$ を使って $Q|\lambda\rangle$ とは書けない状態を考えれば十分である．上の再帰的な議論より，このような状態は「非物理的な粒子」をもたないことがわかる．これらはゲージ不変な演算子を含むBRST不変な演算子をもちいて構成される．A_μ^T は Q 不変なので，(10.100)の一般的な解は次の形で与えられる．

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle + Q|\lambda\rangle. \tag{10.109}$$

したがって，横波の光子の状態は条件(10.100)を満たし，$Q|\lambda\rangle$ の形では書かれていないことが示された．言い換えると，すべての物理的状態は条件(10.100)を満たし，$|\Psi\rangle \sim |\Psi\rangle + Q|\lambda\rangle$ という同値関係をもつ状態の（同値）類 $|\Psi\rangle$ に属する．(これを物理的状態はBRST演算子のコホモロジー類であるという.）

この BRST 形式は非アーベル型ゲージ理論へも一般化できるが，その場合，上のように再帰的な議論をすると，代数的により複雑な構造が現れる．

10.7　$\mathcal{Q}$ 対称性に関するウォード–高橋恒等式

物理的状態は $Q|\Psi\rangle = 0$ を満たすことを示した．ゲージ理論において興味のあるグリーン関数はBRST不変な演算子の N 点関数である．物理的状態に対する S 行列はこのようなグリーン関数から得られるであろう．対称性はグリーン関数が満たす恒等式で言い換えられる．これがウォード–高橋(WT)恒等式であり，以下ではこの恒等式を導出する．この恒等式は，物理的な観測可能量に関する行列要素が特別なゲージの取り方によらないことを示すのに非常に重要である．

汎関数積分で使われる作用(10.80)は $\mathcal{Q}S_q = 0$ を満たす．$\mathcal{Q}$ を4次元時空上の場の汎関数に作用する演算子として表すと

$$\mathcal{Q} = \int d^4x \left[(D_\mu c)^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} - \frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \frac{\delta}{\delta c^a} + iB^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} \right] \tag{10.110}$$

と書ける．つぎに，場とその微分から作られる関数 $\mathcal{O}$ の期待値を考えよう．ただし，この関数は $\mathcal{Q}$ 不変である必要はない．これは

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \int [dAdcd\bar{c}]\, \mathcal{O}(A, c, \bar{c}) \exp\left(-\mathcal{S}_q(A, c, \bar{c})\right) \\ &= \int [dA'dc'd\bar{c}']\, \mathcal{O}(A', c', \bar{c}') \exp\left(-\mathcal{S}_q(A', c', \bar{c}')\right)\end{aligned} \tag{10.111}$$

と表される．第 2 式では積分変数の名前を変えただけである．ここで，ダッシュの付いた変数をもとの変数に $\mathcal{Q}$ による変分を足したものと考える．つまり，

$$\begin{aligned}A_\mu^{a'} &= A_\mu^a + \omega\, \mathcal{Q}\, A_\mu^a, \\ c^{a'} &= c^a + \omega\, \mathcal{Q}\, c^a, \\ \bar{c}^{a'} &= \bar{c}^a + \omega\, \mathcal{Q}\, \bar{c}^a\end{aligned} \tag{10.112}$$

とする．ただし，ω は任意のグラスマン数である．理論の整合性から積分測度が不変であることが要請される．もしそうであるならば，$\delta\mathcal{S}_q = 0$ であることを使うと

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \int [dAdcd\bar{c}]\, (\mathcal{O} + \delta\mathcal{O}) \exp\left(-\mathcal{S}_q - \delta\mathcal{S}_q\right) \\ &= \langle \mathcal{O} \rangle + \langle \delta\mathcal{O} \rangle\end{aligned} \tag{10.113}$$

となる．ただし，$\delta\mathcal{O} = (\mathcal{Q}\ \mathcal{O})$ は演算子 $\mathcal{O}$ の BRST 変換である．(積分測度の不変性については量子異常についての 13 章を参照されたい.）よって，上の方程式は

$$\langle\, (\mathcal{Q}\ \mathcal{O})\, \rangle = 0 \tag{10.114}$$

と表せる．

つぎに，グリーン関数

$$\tilde{G}(x, x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int [dAdcd\bar{c}]\, \mathcal{O}(x) \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \exp\left(-\mathcal{S}_q\right) \tag{10.115}$$

を考えよう．ただし，$\mathcal{O}_i$ は $\mathcal{Q}$ 不変であるとする．式 (10.111)–(10.114) で行ったのと同様の議論を使うと，

$$\langle (\mathcal{Q}\ \mathcal{O}) \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \rangle = 0 \tag{10.116}$$

が得られる．これが $\mathcal{Q}$ 対称性についての基本的な WT 恒等式である．これからすぐに導かれることは，S 行列やゲージ不変な演算子の行列要素はゲージ固定条件によらないことである．例えば，f_1 と f_2 を異なる 2 つのゲージ固定条件であるとしてみよう．このとき，

$$\mathcal{S}_{q1} - \mathcal{S}_{q2} = \int d^4x \; \mathcal{Q} \; [\bar{c}(f_1 - f_2)] \equiv \mathcal{Q} V_{12} \tag{10.117}$$

となる．いくつかの BRST 不変な演算子 $\mathcal{O}_i(x_i)$ のグリーン関数をゲージ固定条件 f_1 のもとで計算すると，次のように変形できる．

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= \int e^{-\mathcal{S}_{q1}} \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \\ &= \int e^{-\mathcal{S}_{q2} - \mathcal{Q} V_{12}} \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \\ &= \int e^{-\mathcal{S}_{q2}} \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) + \int e^{-\mathcal{S}_{q2}} (\mathcal{Q} R_{12}) \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \\ &= G_2(x_1, x_2, \ldots, x_N). \end{aligned} \tag{10.118}$$

最後の行で恒等式 (10.116) と $\mathcal{Q}^2 = 0$ から導かれる関係式 $\exp(-\mathcal{Q}V_{12}) = 1 + \mathcal{Q} R_{12}$, $R_{12} = -V_{12} + \frac{1}{2} V_{12} \mathcal{Q} V_{12} + \cdots$ を使った．式 (10.118) は，$\mathcal{Q}$ 不変な演算子，特にゲージ不変な演算子の N 点関数がゲージの選び方にはよらないことを示している．S 行列要素はグリーン関数から構成されるため，やはりゲージの取り方にはよらない．ゲージ固定条件を変えたときのグリーン関数の変化に対する恒等式はスラフノフ–テイラー (Slavnov–Taylor) 恒等式として知られている．ただし，ここでは原論文とは少し異なる形で表した．

WT 恒等式と Q 不変な演算子のグリーン関数がゲージの取り方によらないという結果は，上で導いたようにいくぶん形式的である．実際の計算では積分に発散がありそれらを正則化して理論が正しく定義されるように発散を適切に除去しないとならない．もし正則化が $\mathcal{Q}$ 対称性を保っていないとすると，これらの結果の一部は成立しなくなるであろう．この点に関して，次の 3 つの可能性がある．

(1) $\mathcal{Q}$ 対称性を保つ正則化が存在し，それが実際の計算で使用された場合．

この場合には WT 恒等式が成立し，上記の S 行列に対するゲージ非依存

性の議論は，正則化され最終的に繰り込まれた理論でも正しく成り立つ.（ただし，$\mathcal{Q}$ 対称性以外の対称性はこの正則化で失われるかもしれない.）

(2) $\mathcal{Q}$ 対称性を保つ正則化はあるが，あらわに $\mathcal{Q}$ 対称性を持たない正則化を行った場合.

この場合，正則化された理論は $\mathcal{Q}$ 対称性を持たない．特に $\mathcal{Q}$ 不変でない項が許されその係数が発散する可能性がある．除去すべきカウンター項は $\mathcal{Q}$ 不変性を持たないが，繰り込まれた理論が $\mathcal{Q}$ 不変性をもつようにカウンター項を選ぶことが可能である．S 行列はこの場合もゲージの取り方にはよらない.（他の対称性も同時に保つようにカウンター項を選べない場合もある．その際は正則化によりこれらの対称性は失われる.）

(3) $\mathcal{Q}$ 対称性を保つ正則化が存在しない場合.

この場合，$\mathcal{Q}$ 対称性は繰り込まれた理論において明らかに破れる．これを $\mathcal{Q}$ 対称性が量子異常（アノマリー）をもつという.「非物理的な」状態が観測可能量の行列要素に寄与し，理論のユニタリー性は一般に失われる．よって，整合的な理論を作るためには，$\mathcal{Q}$ 対称性の量子異常に寄与するような原因を取り除く必要がある．この要請はゲージ理論を作る際に許される物質場の構成に制限を与える.

BRST 不変性に対する WT 恒等式は 1 粒子既約な頂点関数の生成汎関数 Γ を使って表現することもできる．この場合，次の汎関数を考えると便利である.

$$e^W = \int [dAdcd\bar{c}dB] \exp\Bigg(-\mathcal{S}_q + \int J^{a\mu} A^a_\mu + \bar{\eta}^a c^a + \bar{c}^a \eta + (D_\mu c)^a K^{a\mu} - \frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c L^a + J^a B^a \Bigg). \tag{10.119}$$

ここで，W はソース関数 J^μ, η, $\bar{\eta}$, K, L, J の汎関数であり，Γ はいまの場合には

$$\Gamma[A, c, \bar{c}, K, L, J] = \int J^{a\mu} A^a_\mu + \bar{\eta}^a c^a + \bar{c}^a \eta^a - W \tag{10.120}$$

で定義される．ここで $J^{a\mu}$, η^a, $\bar{\eta}^a$ に対してルジャンドル変換を行い，他のソース場はそのままにしておこう．WT 恒等式は

$$0 = \int [dAdcd\bar{c}dB]\, \mathcal{Q} \exp\Bigg(-\mathcal{S}_q + \int J^{a\mu} A^a_\mu + \bar{\eta}^a c^a + \bar{c}^a \eta^a + (D_\mu c)^a K^{a\mu} - \frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c L^a + J^a B^a \Bigg) \tag{10.121}$$

で与えられる．これは

$$\langle \int J^{a\mu} (D_\mu c)^a + \bar{\eta}^a \frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c + i B^a \eta^a \rangle = 0 \tag{10.122}$$

とも書ける．$J^{a\mu}$, η^a, $\bar{\eta}^a$ に関しては Γ を場で微分したものとして表せるが，演算子 B, $D_\mu c$ および $f^{abc} c^b c^c$ の期待値についてはそのような表式はない．これらを微分として表すには余分に導入したソース場を使えばよい．これが汎関数積分にこれらの場を導入した理由である．これより，次の関係式

$$\int d^4x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta K^{a\mu}} - \frac{\delta \Gamma}{\delta L^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta c^a} - i \frac{\delta \Gamma}{\delta J^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}^a} \right] = 0 \tag{10.123}$$

が得られる．これが基本的な恒等式となる．この式を各種の場やソース場で汎関数微分し，それらの場をゼロとおくと，頂点関数の間の無限個の関係式を導くことができる．

10.8　非アーベル型ゲージ理論の繰り込み

つぎに，非アーベル型ゲージ理論の繰り込みに関するいくつかの側面について考えよう．$f^a = \partial \cdot A^a$ および $\alpha = 1$ ととると，作用 (10.77) は

$$\mathcal{S}_q = \int d^4x \Bigg[\frac{1}{4} (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{e}{2} f^{abc} (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} + \frac{e^2}{4} f^{abc} f^{amn} A^{b\mu} A^{c\nu} A^m_\mu A^n_\nu + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + e f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu} c^c + \frac{1}{2} (\partial \cdot A^a)^2 \Bigg] \tag{10.124}$$

と表される．ただし，摂動論で便利なようにゲージポテンシャルを $A^a_\mu \to e A^a_\mu$

とスケール倍した．作用に含まれるすべての演算子は次元 4 の演算子である．伝播関数は予想されるように k^{-2} と振る舞い，素朴に次元の数え上げを行うと起こりうる発散は次元 4 の局所的な項を生成するだけであることが示せる．この理論の繰り込み可能性を証明するため，次の事項が必要である．

(1) 発散の除去，特にボゴリューボフの再帰公式：これは素朴な次元の数え上げについての議論が正しいことを示すために必要である．

(2) ゲージ不変性もしくは BRST 不変性についての WT 恒等式：これを使うと原理的に構成可能なすべての次元 4 の演算子のなかで，(10.124) に出てくるようなテンソル構造とゲージ群の構造を持つものだけが発散する係数を持つことを示すことができる．このため，発散は (10.124) に現れるさまざまな複合演算子の係数を再定義することで消すことができる．

WT 恒等式は，次元正則化のようなゲージ不変な正則化を使用することで保つことができる．また正則化を 1 つ決め，次元の数え上げや重なり発散 (overlapping divergence) の分離に関する規則を確立して，次元 4 をもつ項の係数だけが発散することを明らかにしなければならない．もしこれらの条件が満たされるならば，次の作用をもちいて非アーベル型ゲージ理論の計算をすることができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_q = \int d^4x \Bigg[&\frac{Z_3}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\ &+ \frac{eZ_1}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu} \\ &+ \frac{e^2 Z_4}{4} f^{abc} f^{amn} A^{b\mu} A^{c\nu} A^m_\mu A^n_\nu + \tilde{Z}_3 \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a \\ &+ e\tilde{Z}_1 f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu} c^c + \frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A^a)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{10.125}$$

ここでは，素朴にすべての複合演算子の項が独立な繰り込み因子を持つとして作用を書いた．この作用は，(10.125) で $Z_1 = Z_3 = Z_4 = \tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_3 = \lambda = 1$ とおいた「古典的部分」の $\mathcal{S}$ と，それ以外の部分の（カウンター項と呼ばれる）$\mathcal{S}_q - \mathcal{S}$ に分けることができる．カウンター項の作用は，起こりうる発散

を相殺するために導入されたと考えられる．もし BRST 不変性を保つ正則化を行ったとすると，起こりうる発散とそれに関係したカウンター項はやはりこの性質をもつであろう．これは,「古典的な作用」$\mathcal{S}$ から出発して，カウンター項をループごとに再帰的に決めていくと理解できる．よって，BRST 不変性を保つ正則化を使うことで，カウンター項の作用は BRST 不変なものに制限することができる．WT 恒等式もしくは BRST 不変性を使うと，6 個ある繰り込み因子 $Z_1, Z_3, Z_4, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_3, \lambda$ のなかで，4 個だけが独立となることがわかる．つまり，

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} \tag{10.126}$$

という関係式が成立する．これらの関係式がなぜ成立するかを簡単に見るため，次の BRST 変換

$$\begin{aligned} Q\, A_\mu^a &= \partial_\mu c^a + a f^{abc} A_\mu^b c^c, \\ Q\, c^a &= -\frac{b}{2} f^{abc} c^b c^c, \\ Q\, \bar{c}^a &= \gamma\, \partial \cdot A^a \end{aligned} \tag{10.127}$$

を定義し，作用 (10.125) の Q 不変性を要請する．すると，$aZ_3 = eZ_1, aZ_1 = eZ_4$ と $a\tilde{Z}_3 = e\tilde{Z}_1$ が得られ，よって (10.126) が成立する．変換に現れる $f^{abc}A_\mu^b c^c$ や $f^{abc}c^b c^c$ の項も複合演算子であり，原理的にはこれらも繰り込み因子が必要であることに注意しよう．これを a, b と書く．(ただし，リー代数の添え字と混同しないように注意されたい.）A_μ^a に対しては $Q^2 = 0$ となるので，b は a と等しい．いま補助場 B については，その運動方程式によって消去されているので，反ゴースト場 $\bar{c}^a$ に対して $Q^2 = 0$ を要請することはできない．$\bar{c}^a$ に対して $Q^2 = 0$ を導くには，ゴースト場の運動方程式をもちいなければばならない．またさらに，作用 (10.125) に対する Q 不変性から $\gamma\,\tilde{Z}_3 = \lambda$ が得られる．

4 次元のゲージ理論は，対称性が自発的に破れているかどうかにかかわらず，繰り込み可能である．もし $\frac{1}{2}m^2A^2$ のような質量項をラグランジアンに付け加えることで，ゲージ不変性をあらわに破ると，繰り込み可能性あるいはユニタリー性が失われる．例えば，質量のある $U(1)$ ベクトル粒子の場合，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + (\text{質量項}) \quad (10.128)$$

となる．このとき，A_μ の伝播関数 $D_{\mu\nu}(k)$ は方程式

$$\left[(k^2 + m^2)\delta_{\mu\alpha} - k_\mu k_\alpha\right] D_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (10.129)$$

に従い，この解は

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{\delta_{\mu\nu} + (k_\mu k_\nu / m^2)}{k^2 + m^2} \quad (10.130)$$

となる．大きな $|k|$ に対して，この関数は $k_\mu k_\nu / k^2$ と振る舞う．よって，通常の次元の数え上げについての議論が成立しない．つまり，任意の高い次元の演算子に対して発散が生じてしまう．このラグランジアン (10.128) から導かれる運動方程式は，$\partial \cdot A = 0$ という拘束条件をもち，負のノルムをもつ状態を除外することができる．別の手法として，$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu(-\Box) A^\mu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ という作用を考えるとすると，大きな $|k|$ でこの伝播関数はよい振る舞いをするが，A_0 成分は分離せずユニタリー性に問題が生じる．これら 2 つの場合のよい性質を兼ね備えた理論，つまり負ノルム状態を消去できるような十分なゲージ対称性をもち，しかも高エネルギーでの伝播関数の振る舞いが k^{-2} となるような状況は，対称性が自発的に破れたゲージ理論によって与えられる．

10.9 フェルミオン作用と QED 再考

BRST 形式をもちいて繰り込み定数の間の関係性を与える議論は，ゲージ場と結合するフェルミオンがある場合にも拡張できる．フェルミオン場についての変換は

$$\begin{aligned} Q\psi &= iac^a(t^a \psi), \\ Q\bar{\psi} &= ia(\bar{\psi} t^a) c^a \end{aligned} \quad (10.131)$$

の形で与えられる.（先験的には a の代わりに異なる定数 δ をもちいるべきである．しかし，$Q^2 = 0$ から δ は a となることがわかる.）作用のフェルミオンに関する部分は

$$\mathcal{S} = \int d^4x\ Z_2 \bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m)\psi - ieZ_1 \bar{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu t^a \psi \quad (10.132)$$

で与えられる．BRST 不変性を保つ正則化により，以前と同様に制限を受けた作用をもちいることができる．ただし，この作用では繰り込み定数が互いに関係づけられている．フェルミオン作用 (10.132) に対して Q 不変性を要請すると，$Z_1 = Z_2$ が得られる．これらの結果は $U(1)$ ゲージ理論つまり量子電磁力学の場合にも適用できる．$Z_1 = Z_2$ の関係については，すでに 1 ループの計算で具体的に示したが，ここではそれが一般に成り立つことがわかる．

10.10　伝播関数と有効電荷

つぎに，非アーベル型ゲージ理論における 1 ループ積分の具体例として，ゲージボソンの伝播関数を 1 ループのオーダーまで計算し，それを有効電荷と関係づけてみよう．

このとき必要となるファインマン図は図 10.1 で与えられる．(点線はゴースト場の伝播関数を表す.）これらのファインマン図の積分は発散するため，正則化が必要となる．以前は，単純に運動量切断（カットオフ）を導入したが，いまの場合，積分計算はより複雑になる．そこで，次元正則化のようなゲージ不変な正則化をもちいると計算は大幅に簡略化される．次元正則化の基本的な考え方は，ϵ を微少量として，$n = 4 - \epsilon$ という任意の次元において計算をすることにある．これは（ファインマン図の）さまざまな積分表式を任意次元へ解析接続することで得られる．ファインマン図に現れる積分は n の関数として定義され，$n = 4$ では 4 次元で積分が発散することに対応する極をもつ．したがって，ϵ でローラン展開して極となる項を取り出し，これらの項を繰り込み定数 Z_i によって相殺してから $\epsilon \to 0$ の極限をとればよいことがわかる．ゲージ不変性の概念は（理論が定義されている）次元にはよらないので，この正則化はゲージ不変な正則化である．以下では，このような手続きに沿って繰り込みを行おう．

次元正則化を実行するには，まず，ファインマン積分の被積分関数を代数的に変形する必要がある．この際，n 次元で計算していることに注意して，添え字の縮約とトレースをとらなければならない．基本的なタイプの積分には次のものがあり，n 次元では以下のような公式を使って計算できる．

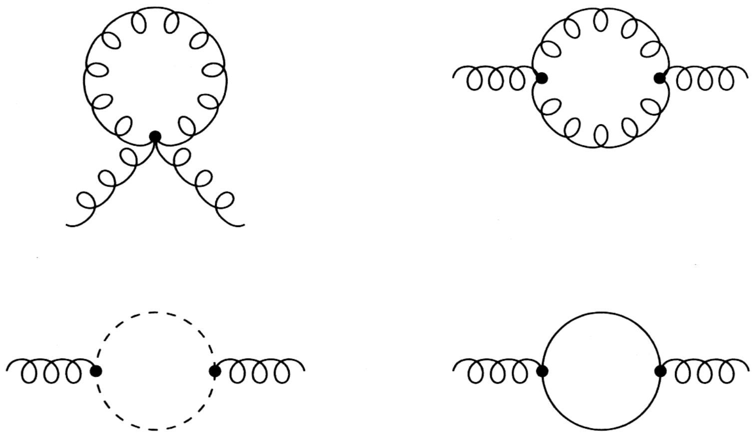


図 10.1 ゲージボソン伝播関数への 1 ループ補正.

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2+M^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha-n/2}},$$
$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{p^2}{(p^2+M^2)^\alpha} = \frac{n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha-n/2-1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha-n/2-1}},$$
$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+M^2)^\alpha} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha-n/2-1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha-n/2-1}}. \tag{10.133}$$

ここで，Γ はオイラーのガンマ関数である．必要なローラン展開を実行するには，公式 $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ と

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{10.134}$$

を使えばよい．γ はオイラー–マスケローニ (Euler–Mascheroni) 定数であり，およそ 0.5772 の値である．

左上のファインマン図の寄与

$\langle e^{-S_{int}} \rangle = e^{-\Gamma}$ と書き，必要なウィック縮約を行うと，最初（左上）のファインマン図の寄与は

$$\Gamma_{diag1} = \frac{n-1}{2} C_2 \int G(x,x) A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \tag{10.135}$$

と求めることができる．ここで，C_2 はゲージ群の随伴表現に属する2次のカシミール不変量であり，$C_2 \delta^{ab} = f^{amn} f^{bmn}$ で定義され，$SU(N)$ 群に対してはNとなる．

右上のファインマン図の寄与

2つ目（右上）のファインマン図は

$$\langle e^{-S_{int}} \rangle = \frac{1}{2!} \left(\int G(x,y) \frac{\delta}{\delta A_\alpha^m(x)} \frac{\delta}{\delta A_\alpha^m(y)} \right)^2 \frac{1}{2!} \left(\int f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A_\mu^b A_\nu^c \right)^2 \tag{10.136}$$

の展開から生じる．ウィック縮約を実行すると，

$$\begin{aligned}\Gamma_{diag2} = C_2 \int \Bigg[& -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a(x) f_{\mu\nu}^a(y) G(x,y) G(x,y) \\ & + f_{\mu\nu}^a(x) A_\nu^a(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y^\mu} G(x,y) - \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) G(x,x) \\ & - \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\nu^a(y) \Bigg\{ (n-1) \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\mu} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\nu} \\ & + (2-n) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} G(x,y) \Bigg\} \Bigg]\end{aligned} \tag{10.137}$$

となる．ただし，$f_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ である．

左下のファインマン図の寄与，ゴースト場のループ

ゴースト場のループの寄与は

$$\Gamma_{diag3} = \frac{C_2}{2} \int A_\mu^a(x) A_\nu^a(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\mu} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\nu} \tag{10.138}$$

となることが簡単にわかる．

以上3つのファインマン図の寄与

これら3つの式 (10.135), (10.137), (10.138) をまとめると

$$\Gamma = e^2 \mu^\epsilon C_2 \int \Bigg[\frac{n-2}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) G(x,x)$$

$$- \frac{1}{4} f^a_{\mu\nu}(x) f^a_{\mu\nu}(y) G(x,y) G(x,y) + f^a_{\mu\nu}(x) A^a_\nu(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y^\mu} G(x,y)$$
$$- \frac{n-2}{2} A^a_\mu(x) A^a_\nu(y) \left\{ \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\mu} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} G(x,y) \right\} \Bigg] \tag{10.139}$$

となる．ただし，$f^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu$ である．これら各項は e を結合定数としたとき e^2 に比例している．これは $A \to eA$ と再規格化することで得られるが，4 次元以外では結合定数は次元をもつ．つまり，n 次元での結合定数の 2 乗 e_n^2 は，質量次元 $4-n=\epsilon$ をもつ．ここで，質量次元をもつパラメータ μ を導入し，$e_n^2 = e^2\mu^\epsilon$ と書こう．この e は 4 次元での結合定数と考えられる．式 (10.139) では，μ^ϵ と 4 次元の結合定数 e が使われている．

最初の項は次のように評価できる．

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{2} G(x,x) &= \frac{n-2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2+M^2} \Bigg]_{M=0} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{n-2}{2} \Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right) (M^2)^{1-\epsilon/2} \Bigg]_{M=0} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (M^2)^{1-\epsilon/2} \Bigg]_{M=0} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{10.140}$$

有限の ϵ に対して積分は消え，よって正則化された理論ではゼロとおける．この積分は単純に考えると 2 次発散している．これは次元正則化の特殊性である．つまり，次元正則化では 2 次発散は現れず，そのような積分をゼロとおくことができる．(これは次元正則化した理論で 2 次発散がまったく現れないことを意味しているのではない．次元正則化された理論であっても，摂動級数をボレル和などによって足し上げることによって 2 次発散が再び現れるという例も知られている．)

式 (10.139) の第 2 項は

$$(\text{第 2 項}) = \frac{e^2}{4} \int f^a_{\mu\nu}(x) f^a_{\mu\nu}(y) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-ik(x-y)} \Pi^{(2)}(k),$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)}(k) &= -(\mu^2)^{\epsilon/2}\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{1}{p^2(p-k)^2} \\
&= -(\mu^2)^{\epsilon/2}\int_0^1 du \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{1}{[p^2+k^2u(1-u)]^2} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 du\, \Gamma(\epsilon/2)\exp\left[\frac{\epsilon}{2}\log\left(\frac{4\pi\mu^2}{k^2u(1-u)}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon}-\gamma+2+\log 4\pi-\log(k^2/\mu^2)\right] \qquad (10.141)
\end{aligned}$$

と計算できる．第 3 項も同様に計算でき，第 2 項と同じになることがわかる．最後の 2 つの項は

$$\begin{aligned}
&(\text{第 4 項})+(\text{第 5 項}) \\
&\qquad = e^2\int A^a_\mu(x)A^a_\nu(y)\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}e^{-ik(x-y)}\Pi^{(4+5)}(k), \\
&\Pi^{(4+5)}(k) = (\mu^2)^{\epsilon/2}(1-\epsilon/2)\int_0^1 du\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{-2p_\mu p_\nu+k_\mu k_\nu u(1-2u)}{[p^2+k^2u(1-u)]^2} \\
&\qquad = (k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\frac{1}{96\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\log 4\pi-\log(k^2/\mu^2)+\frac{5}{3}\right] \\
&\qquad\qquad (10.142)
\end{aligned}$$

となる．これらの項を足し合わせると，有効作用の 2 次の項に対する 1 ループの寄与は

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{4}\int_{x,y,k} f^a_{\mu\nu}(x)f^a_{\mu\nu}(y)e^{-ik(x-y)}\,\Pi(k), \\
\Pi(k) &= -\frac{e^2C_2}{16\pi^2}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\log 4\pi-\log(k^2/\mu^2)\right)+\frac{31}{9}\right]
\end{aligned} \qquad (10.143)$$

となる．

フェルミオンループの寄与

これらの寄与に加えて，ゲージ場と結合し，ゲージ群の基本表現に属すフェルミオンが N_f 個あるとして，それらの寄与を考えてみよう．フェルミオンの作用は $\mathcal{S}=\bar{q}[\gamma\cdot(\partial+A)+m]q$ で与えられる．ただし，$A_\mu=-it^aA^a_\mu$ であり，t^a は基本表現での（リー代数の）表現行列である．群 $SU(N)$ に対しては，これらはトレースがゼロの $(N\times N)$ のエルミート行列である．ここで，関係式

$\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ が成立するように規格化する．γ 行列は $\mathrm{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 2^{n/2}\delta^{\mu\nu}$ をみたす．有効作用 Γ のなかで，A の 2 次の項に対する 1 ループの寄与は

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int_{x,y,k} A^a_\mu(x)A^a_\nu(y)\ e^{-ik(x-y)}\,\Pi_{\mu\nu}(k),$$

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(k) &= e^2 N_f\ 2^{n/2-1}(\mu^2)^{\epsilon/2}\int_0^1 du \\ &\quad\times\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{2p_\mu p_\nu + (\delta_{\mu\nu}k^2 - 2k_\mu k_\nu)u(1-u) - \delta_{\mu\nu}(p^2+m^2)}{[p^2+k^2u(1-u)]^2} \\ &= e^2 N_f\,\frac{(k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)}{4\pi^2}\int_0^1 du\ u(1-u) \\ &\quad\times\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 2\pi - \log\left(\frac{k^2u(1-u)+m^2}{\mu^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{10.144}$$

で与えられる．この公式を使うと，フェルミオンの Γ に対する寄与は次のように変形される．

$$\Gamma = \frac{1}{4}\int_{x,y,k} f^a_{\mu\nu}(x)f^a_{\mu\nu}(y)e^{-ik(x-y)}\,\Pi_f(k),$$

$$\begin{aligned}\Pi_f(k) = \frac{e^2N_f}{4\pi^2}\int_0^1 du\ u(1-u)\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 2\pi\right. \\ \left. - \log\left(\frac{k^2u(1-u)+m^2}{\mu^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{10.145}$$

有効作用に対する $\hbar$ についての 1 次補正は，式 (10.125) の Z_3 からも寄与がある．したがって，Γ の 2 次の項で $\hbar$ についての 1 次補正は

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{4}\int_{x,y,k} f^a_{\mu\nu}(x)f^a_{\mu\nu}(y)e^{-ik(x-y)}\,V(k), \\ V(k) &= Z_3 + \Pi_f(k) + \Pi(k)\end{aligned} \tag{10.146}$$

と書ける．ここで，$1/\epsilon$ の項が相殺するように Z_3 を選ぶことができ，そうすると，発散することなく $n\to 4$ の極限をとることができる．これがゲージ粒子の伝播関数の 1 ループでの繰り込みである．k によらない定数項を Z_3 に含めることもできる．Z_3 を正確にはどのように定義するかは繰り込みスキームの選び方による．この違いは μ の定義の違いとみなせることに注意しよう．最小引算法（minimal subtraction, MS スキーム）と呼ばれるスキームでは，Z_3 を $1/\epsilon$ の項だけを除去するように選ぶ．ここでの議論においては，すべて

の定数項もなくなるように Z_3 を選ぶのが簡単である．これは

$$Z_3 = 1 + e^2 \frac{5C_2 - 2N_f}{48\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log 4\pi\right) + \frac{31e^2C_2}{144\pi^2} + \frac{e^2N_f \log 2}{24\pi^2} + \cdots,$$

$$V(k) = 1 + \frac{5e^2C_2}{48\pi^2}\log(k^2/\mu^2) - \frac{e^2N_f}{4\pi^2}\int_0^1 du\, u(1-u)\log\left(\frac{k^2u(1-u)+m^2}{\mu^2}\right) \tag{10.147}$$

ととることに対応する．以下では，フェルミオンの質量がゼロの場合を考えるが，この場合，Z_3 は上の表式から $5e^2N_f/72\pi^2$ を引いたものとして取ることができる．つまり，$u(1-u)\log u(1-u)$ の積分を Z_3 の取り方に吸収させる．このとき

$$V(k) = 1 + \frac{e^2}{48\pi^2}(5C_2 - 2N_f)\log(k^2/\mu^2) \tag{10.148}$$

となり，この計算から量子補正を受けたゲージ粒子の伝播関数は

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{V(k)} \tag{10.149}$$

という形で与えられる．特に上式が示していることは，もともとは次元を合わせるという理由で導入された量である μ がより物理的に解釈できるということである．つまり，この量は $V(k)=1$ となるとき運動量移行 k で与えられ，そのとき，伝播関数はちょうど $1/k^2$ となる．

ゲージ粒子の交換によるフェルミオンどうしの相互作用は，

$$\mathit{\Gamma} = \frac{e^2}{2}\int \bar{q}t^a\gamma_\mu q(x)\ \bar{q}t^a\gamma_\mu q(y)\ \tilde{G}(x,y) \tag{10.150}$$

で与えられる．QED の場合には，この補正を受けた相互作用は，k^2 とともに相互作用の強さ（つまり k 依存する有効電荷）が増大すると解釈できた．いまの場合もこのような解釈は可能であるが，状況はそう簡単ではない．その理由は，フェルミオンの相互作用に寄与するファインマン図が，頂点に対する補正など，まだ他にもあるからである．QED の場合は，このような補正は図 10.2 で与えられる．WT 恒等式は頂点補正とフェルミオンの自己エネルギーを関係づけ，結果として，これらの寄与は相殺する．つまり，これらは有効電荷には寄与しない．これは非アーベル型ゲージ理論でも同じであ

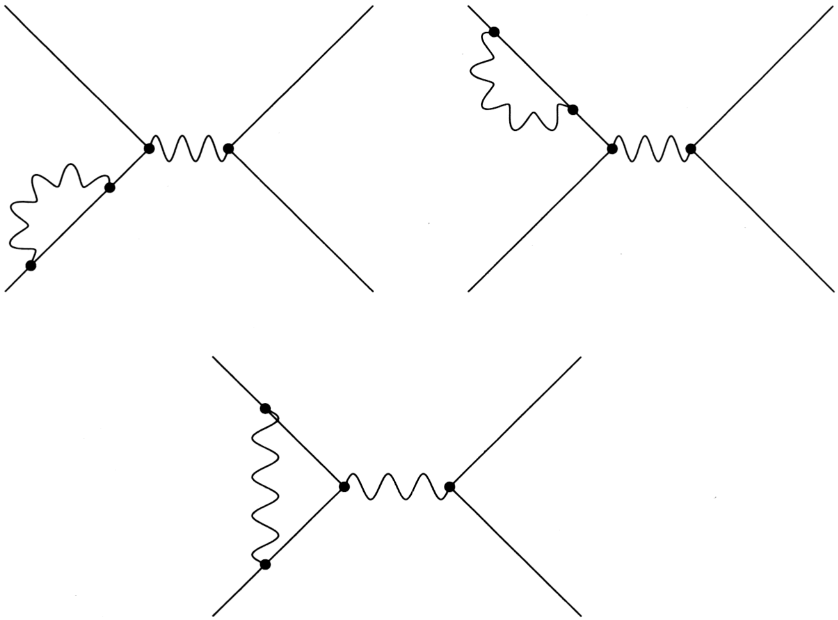


図 10.2 ゲージボソンの交換によるフェルミオン相互作用に対する補正.

る．しかしながら，非アーベル型ゲージ理論には図 10.3 で与えられる補正も存在する．この図に対する数学的な表式の一部は，伝播関数からの寄与と似た形をしており，この効果は有効電荷の定義に取り入れられなければならない．このファインマン図の表式は

$$\Gamma = e^4 f^{abc} \int \bar{q}(x) t^a \gamma_\mu q(x)\ \bar{q}(y) t^b t^c F_\mu(y,z) q(z),$$

$$F_\mu(y,z) = -\int_k e^{ik(x-y)+ip'(z-y)} \frac{1}{k^2} \int \frac{d^n p'}{(2\pi)^n} \frac{1}{p'^2(p'+k)^2} \tag{10.151}$$
$$\times \left[(\gamma\cdot k - \gamma\cdot p') S(y,z)\gamma_\mu - \gamma_\mu S(y,z)(2\gamma\cdot k + \gamma\cdot p') + (2p'_\mu + k_\mu)\gamma_\alpha S(y,z)\gamma_\alpha \right]$$

で与えられる．この積分は面白い特性をもっている．まず，$-\gamma\cdot p' S(y,z) e^{-ip'y} = -i\gamma\cdot\partial(e^{-ip'y}) S(y,z)$ と書くと，y に関して部分積分ができる．すると，これ

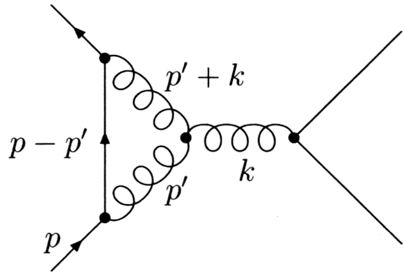


図 10.3　ピンチングに寄与するダイヤグラム.

から $i\gamma\cdot\partial S(y,z)$ という項が現れるが，これは δ 関数の i 倍つまり $i\delta^{(n)}(y-z)$ となる．このような項は 2 点 y と z が同一点となることから，ピンチング項 (pinching term) と呼ばれる．図で言うと，フェルミオンの伝播関数が 1 点に縮まるものと考えられる．このピンチング項の寄与がいま興味のある問題である．この部分積分から y についての微分を含む他の項も現れるが，これらは p か k のどちらかのベキを含んでおり，カレント・カレントの相互作用の構造を与えない．したがって，これらの項は他の文脈では重要であるかもしれないが，有効電荷を議論する上では関係がない．代数的に式を変形すると，(10.151) によるピンチング項の寄与は

$$\Gamma = \frac{e^2}{2}\int \bar{q}(x)t^a\gamma_\mu q(x)\ \bar{q}(y)t^a\gamma_\mu q(y)\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\,e^{ik(x-y)}\,F(k),$$

$$F(k) = e^2(\mu^2)^{\epsilon/2}\frac{2C_2}{k^2}\int\frac{d^np'}{(2\pi)^n}\frac{1}{p'^2(p'+k)^2} \tag{10.152}$$

$$= \frac{e^2C_2}{8\pi^2k^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 2 + \log 4\pi - \log(k^2/\mu^2)\right]$$

となることがわかる．いまの場合，$1/\epsilon$ の項と定数項は頂点関数の繰り込みによって相殺される．この結果を伝播関数からの寄与である式 (10.149), (10.150) と組み合わせると，有効的なカレント・カレント相互作用は

$$\Gamma_{eff} = \frac{1}{2}\int \bar{q}t^a\gamma_\mu q(x)\ \bar{q}t^a\gamma_\mu q(y)\,V_{eff}(x,y),$$

$$V_{eff}(k) = \frac{e^2}{k^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{48\pi^2}(5C_2-2N_f)\log(k^2/\mu^2)\right)^{-1} - \frac{e^2C_2}{8\pi^2}\log(k^2/\mu^2)\right]$$

$$\approx \frac{1}{k^2}\left[1+\frac{e^2}{48\pi^2}(11C_2-2N_f)\log(k^2/\mu^2)\right]^{-1} \tag{10.153}$$

となる．ここで，非アーベル型ゲージ理論における微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ を定義しよう．すると

$$V_{eff}(k) = 4\pi\frac{\alpha(k)}{k^2} \tag{10.154}$$

と書くことができ，有効結合定数は k^2 の関数として

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \frac{\alpha(\mu)}{[1+\alpha(\mu)\ b\ \log(k^2/\mu^2)]}, \\ b &= \frac{11C_2-2N_f}{12\pi} \end{aligned} \tag{10.155}$$

と与えられる．

QED の場合は有効電荷は運動量移行 k とともに増大した．いまの場合には，フェルミオンの数があまり大きくならない限り，つまり $11C_2 > 2N_f$ の条件が満たされる限り，α は k が増大するとともに減少することがわかる．これは高エネルギーでは理論が漸近的に相互作用がない理論となることを意味し，この現象は 9 章で導入した繰り込み群の言葉を使って**漸近的自由性**と呼ばれる．漸近的自由性は 1973 年に発見され，非アーベル型ゲージ理論をもちいて強い相互作用の理論を構築するのに重要な第一歩となった．量子色力学 (QCD) とは，強い相互作用を記述する理論であり，これは $SU(3)$ のゲージ理論がこの $SU(3)$ の基本表現に属すクォークと結合している理論である．この場合，2 次のカシミール不変量は $C_2 = 3$ で与えられ，クォークの数が 16 以下だと理論は漸近的に自由となる．現在，6 種類のクォークが存在することが知られており，またそれ以上のクォークはないであろうと信じる理由がある．漸近的自由性は，数 GeV 以上のエネルギーで観測されている．そのようなエネルギー・スケールでは，上の公式でクォークの質量項を無視することはできず，質量によるループ積分への寄与が抑制される．その結果，非常に重いクォークは有効電荷には効かず，仮に我々の知らない非常に重い質量のクォークがあるような場合でも，現在観測されているエネルギー・スケールでの漸近的自由性には影響を与えない．

有効電荷を繰り込み群方程式を解いて得られる走る結合定数とみなすこともできる．ここでは直接，有効電荷の計算を行ったので，その結果をもちい

て非アーベル型ゲージ理論の β 関数を 1 ループの範囲で計算すると

$$\beta(e) = -\frac{e^3}{48\pi^2}(11C_2 - 2N_f) \tag{10.156}$$

を得る．この β 関数は負であり，これは漸近的自由性から予想される．ここでは，有効電荷を最初に計算してから β 関数を求めた．作用 (10.125) へ戻り，これを裸の場で書いてみると，裸の電荷 e_0 は繰り込まれた電荷 e と関係式 $e_0 = Z_1 Z_3^{-3/2}$ で結ばれていることがわかる．したがって，Z_1 をまず計算し，Z_3 はすでに求まっているので，この関係式と定義式 (9.121) をもちいると β 関数を計算できる．これが非アーベル型ゲージ理論でよくもちいられる β 関数の計算方法である．

高エネルギーでの QCD の振る舞いはグリーン関数に対する繰り込み群方程式を β 関数 (10.156) を使って解くことで得られる．漸近的自由性のために，摂動論をもちいて必要な異常次元を計算することができる．摂動的な QCD はそれ自体で広範な研究対象となっているが，この摂動論が高エネルギー散乱過程に適用できるのはここで議論した漸近的自由性に基礎づけられているためである．

有効電荷の表式から，有限で次元をもつパラメータ Λ_{QCD} を次の式で定義できる．

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} + b\log\left(\frac{\Lambda_{QCD}^2}{\mu^2}\right) = 0. \tag{10.157}$$

このパラメータ Λ_{QCD} をもちいると，有効結合定数は

$$\begin{aligned}\alpha(k) &= \frac{1}{b\log(k^2/\Lambda_{QCD}^2)} \\ &= \frac{12\pi}{(11C_2 - 2N_f)\log(k^2/\Lambda_{QCD}^2)}\end{aligned} \tag{10.158}$$

と書ける．有効結合定数はこのパラメータ Λ_{QCD} だけで決まっている．ここでは，次元によらない結合定数 $\alpha(\mu)$ が次元をもつパラメータ Λ_{QCD} に置き換えられた．これは次元の転化 (dimensional transmutation) と呼ばれる．Λ_{QCD} は理論のさまざまな運動学的な領域を決定し，各領域で理論をどう取り扱うかを決める上で重要な量である．この Λ_{QCD} よりも十分高い k をもつエネルギー領域のモードは，弱く結合し摂動的な解析が使える．一方で，

Λ_{QCD} と同等または Λ_{QCD} よりも小さな k をもつモードは非摂動的に扱わなければならない．つまり，Λ_{QCD} は理論を決める基本的なスケールを決めるパラメータである．重要なことは，理論自体が Λ_{QCD} を決めているのではなく，この量は理論に必要な入力パラメータであるという点である．このような自由度を理論がもつのは，対応する古典論がスケール不変性をもっていたことの名残である．

参考文献

1. 非アーベル型ゲージ理論についての最初の文献は O. Klein, Lecture reported in *New Theories in Physics*, Int. Inst. of Intellectual Cooperation, Paris (1939) である．今日知られているゲージ理論は以下で与えられた．C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954); R. Shaw, Ph.D. Thesis, Cambridge University, UK (1954); R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

2. チャーン–サイモンズ項は S.S. Chern and J. Simons, Ann. Math. **99**, 48 (1974) による．チャーン–サイモンズ理論の物理への導入は R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981); J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 157 (1981); S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982); Ann. Phys. **140**, 372 (1982) でなされた．

3. 平行移動の概念は一般相対性理論で与えられた．例えば，S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley Text Books (1972) を参照されたい．電磁力学において，その重要性は F. London, *Superfluids*, John Wiley and Sons, Inc. (1950); Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1957) などで認識された．平行移動演算子 $U(x, y, C)$ をもちいた電磁力学の定式化については S. Mandelstam, Ann. Phys. **19**, 1 (1962) を参照されたい．

4. ウィルソン・ループ演算子は K.G. Wilson, Phys. Rev. **D14**, 2455 (1974) で導入された．

5. ゲージポテンシャルの空間およびゲージ変換についての数学的な定義は I.M. Singer, Phys. Scripta **T24**, 817 (1981); Commun. Math. Phys. **60**, 7 (1978) で与えられている．

6. ファデーエフ–ポポフの方法は B. de Witt, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967); L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **B25**, 29 (1967) による．これらのダイヤグラム的な規則は，重力理論の文脈で，すでに R.P. Feynman, Acta Phys. Polonica **24**, 697 (1963) において与えられていた．

7. グリボフ問題については V.N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978); I.M. Singer, Commun. Math. Phys. **60**, 7 (1978) を参照されたい．(2 つ目の論文は文献 5 で挙げたものと同じである.) この問題に関する明解な解説は T. Killingback and E.J. Rees, Class. Quant. Grav. **4**, 357 (1987) で与えら

れている．

8. BRST 対称性は次の文献で発見された．C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Commun. Math. Phys. **42**, 127 (1975); I. Tyutin, Lebedev Institutre preprint N39 (1975). この対称性はゲージ理論をファイバー束の理論として定式化したとき，ファイバーの変換として美しく幾何学的に解釈できる．これは J. Thierry-Mieg, J. Math. Phys. **21**, 2834 (1980); R. Stora, in *Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse, 1983*, G. 't Hooft *et al.* (eds.), Plenum Press (1984) で与えられている．

9. BRST 不変な状態として物理的状態を解析したのは次の論文である．T. Kugo and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. **60**, 1869 (1978); Prog. Theor. Phys. Suppl. **66**, 1 (1979).

10. Γ に対する WT 恒等式は J. Zinn-Justin, in *Trends in Elementary Particle Theory-International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn, 1974*, Springer-Verlag (1975) で与えられている．スラフノフ–テイラー恒等式は WT 恒等式とよく類似している．また，この恒等式は，非アーベル型ゲージ理論の繰り込み可能性についての証明に非常に有用であった．このスラフノフ–テイラー恒等式は A.A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **10**, 152 (1972); J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971) で与えられた．

11. 非アーベル型ゲージ理論の繰り込み可能性についての最初の証明は G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B50**, 318 (1972); B.W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **D5**, 3121 (1972); *ibid.* **D7**, 1049 (1972) による．その後，BRST 対称性を使って証明は行われた．

12. 次元正則化は G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1973) による．

13. 有効電荷の計算が行われ，漸近的自由性が発見されたのは次の論文においてである．D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

14. ピンチング項を使った計算手法は J.M. Cornwall, Phys. Rev. **D26**, 1453 (1982); J.M. Cornwall and J. Papavassiliou, Phys. Rev. **D40**, 3474 (1989) による．

第 11 章
対称性

11.1　対称性の表示法

連続的な対称性から議論を始めよう．3 章でみたように，ラグランジアンが連続的でかつ大域的な対称性をもつとき，保存カレント J_μ^A とそれに付随する保存電荷 Q^A が存在する．ここで，A は $1, 2, \ldots, N$ の値をとる．（N は連続的対称性の数を表す.）電荷 Q^A が保存するとは，電荷がハミルトニアンと交換すること，つまり $[Q^A, H] = 0$ を意味する．これはまた $[Q^A, Q^B]$ が H と可換であることを示すので，新しい保存電荷が導かれる．Q がすでにすべての保存電荷を含むとき，交換子 $[Q^A, Q^B]$ は Q それ自身の関数でなければならない．

まず，Q が内部対称性を生成する場合を考えよう．固有値 E_α をもつ H の固有状態を $|\alpha\rangle$ で表すと $H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$ となる．$[H, Q^A] = 0$ なので，$H\left(Q^A|\alpha\rangle\right) = E_\alpha\left(Q^A|\alpha\rangle\right)$ が成り立つ．よって，ある状態に Q^A を作用させると縮退した別の状態が与えられる．Q を $|\alpha\rangle$ に何度も作用させることで，この状態と縮退関係にある状態の集合が得られる．この操作は新しい状態が現れなくなるまで，つまりそれ以上 Q を作用させても既存の状態の線形結合で表される状態しか現れなくなるまで，続けることができる．$|\alpha\rangle$ からこのようにして得られた状態の集合は Q の作用のもとで閉じている．この集合に対応するヒルベルト空間の部分空間を $\mathcal{H}_\alpha$ で表し，$\{|\alpha_i\rangle\}$ をその部分空間の正規直交基底とする．このとき，$|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_\alpha$ に対して $Q^A|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_\alpha$ となる．したがって，部分空間 $\mathcal{H}_\alpha$ で Q^A の行列表現 $(Q^A)_{ij} = \langle\alpha_i|Q^A|\alpha_j\rangle$ が得られ

る．これは行列の積のもとでその代数の表現を成す．というのも，Q によって $\mathcal{H}_\alpha$ 上の状態はその補空間上の状態に移らないからである．構成法からわかるように，これは既約表現でもある．なぜなら，適当な Q を作用させることで $\mathcal{H}_\alpha$ 上の任意の状態は別の状態に変換されるからである．さらに，Q はエルミート演算子として表されるので，この代数の既約表現は既約ユニタリー表現 (UIR) を与える．H の異なる固有状態についても同様な手法をもちいると，系の状態は対称性演算子による代数の既約ユニタリー表現で分類できることがわかる．

この結果はパリティなどの離散的対称性にも成り立つ．ポアンカレ変換のような時空間の連続対称性を含めると，ハミルトニアン H はこれらと交換せず，対称性を生成する代数の一部となる．この場合も，状態は（時空間の対称性を含めた）代数の既約ユニタリー表現を成す．各既約ユニタリー表現に属する状態は，ハミルトニアンではなく別の不変演算子の固有値について縮退している．(時空間の対称性はコンパクトではないため，この対称性を含む代数のユニタリー表現は無限次元になる.）付録にある相対論的不変性についての議論はこの場合の一例である．なお，付録では質量とスピンによって指定される表現によってポアンカレ代数が議論されている．

上の結果は，$Q^A|\alpha\rangle$ が規格化不可能で，そのためヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に属さない場合には成り立たない．このとき，対称性の代数はユニタリー表現をもたず，対称性は自発的に破れていると言われる．この構造をよく理解するには，場の理論において任意の状態は基底状態あるいは真空状態 $|0\rangle$ にさまざまな局所演算子を作用させることで作られることをまず思い出さなければならない．したがって，$|\alpha\rangle = A_\alpha|0\rangle$ と書くことができ，交換関係から $[Q^A, A_\alpha] \equiv B_\alpha^A$ を計算することができる．B_α^A は理論の別の局所演算子であると考えられる．一般的に，状態 $A_\alpha|0\rangle$, $B_\alpha^A|0\rangle$ の規格化には正則化の手続きが伴う．ここでは，そのことを理解した上で状態が規格化可能であるとみなそう．そこで

$$Q^A|\alpha\rangle = B_\alpha^A|0\rangle + A_\alpha\, Q^A|0\rangle \tag{11.1}$$

と表そう．もし基底状態が対称性を保つなら，つまり $Q^A|0\rangle = 0$ であるなら，$Q^A|\alpha\rangle$ は上述の意味で規格化可能であり，いままでの議論が適用できるのは明らかであろう．状態は対称性代数の既約ユニタリー表現で分類される．こ

の主張の対偶は，もし $Q^A|\alpha\rangle$ が規格化不可能であるならば真空は不変でありえない，となる．したがって，自発的対称性の破れは，演算子（作用素）の成す代数レベルでは対称性を保つが，真空（あるいは基底状態）についてはその対称性を破る場合に対応する．このとき対称性の代数はユニタリーには実現されない．

ここまでの議論は，場の量子論における対称性の表示法には 2 つ方法があることを示しており，これらは以下のように要約できる．ラグランジアンが連続的な大域対称性をもち，その対称性が代数 $\mathcal{A}$ を成す演算子の集合 $\{Q^A\}$ で表されるとすると，次の 2 つの可能性がある．

1. 基底状態が対称性 $Q^A|0\rangle = 0$ をもち，すべての状態が $\mathcal{A}$ の既約ユニタリー表現によって分類される．
2. $Q^A|0\rangle \neq 0$．つまり対称性が自発的に破られており，$\mathcal{A}$ の表現のユニタリー性が失われている．

第 1 の場合はしばしば対称性のウィグナー表示と呼ばれ，また第 2 の場合は対称性の南部–ゴールドストン表示[1]と呼ばれる．（離散的な大域対称性の自発的破れも可能である．離散的対称性の自発的破れを場の理論のなかでどのように扱うかは，その詳細には触れないが，以下の議論で明らかになるであろう．）

重力や宇宙論的な効果を無視すると，現実世界では，対称性はポアンカレ代数で与えられる．これはウィグナー表示で表される．というのも，観測される粒子はポアンカレ群の既約ユニタリー表現によって分類されるからである．（付録では，このことをもちいて相対論的波動関数を構成した．）ウィグナー表示が可能になるには真空状態がローレンツ不変でなければならない．3 章でローレンツ対称性をもちいてゼロ点エネルギーを消去したのはこのためである．この章では対称性のウィグナー表示について議論し，自発的対称性の破れについては次章で考えよう．

---

1 ［訳註］原文ではゴールドストン表示となっているが，以下ではより正確に南部–ゴールドストン表示と呼ぶことにする．

11.2　ウォード–高橋恒等式

場の量子論において興味のある量はグリーン関数である．ユークリッド化されたグリーン関数は

$$Z[J] = \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi] + \int J_A \varphi^A \right) \tag{11.2}$$

で生成される．ここで，$[d\varphi]$ は場 φ^A の汎関数積分の測度である．理論が対称性をもつとき，この対称性はグリーン関数の関係式に現れる．このような関係式はウォード–高橋 (WT) 恒等式として知られており，次のように導くことができる．φ は (11.2) の積分変数なので

$$\int [d\varphi'] \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi'] + \int J_A \varphi'^A \right) = \int [d\varphi] \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi] + \int J_A \varphi^A \right) \tag{11.3}$$

と書ける．まず，連続的な変換を考えよう．対称性変換のもとで $\varphi(x)$ は $\varphi(x) \to \varphi(x) + \xi(x, \varphi)$ と変換する．ただし，$\xi(x, \varphi)$ は無限小とする．(11.3) の新しい積分変数 φ' を $\varphi + \xi$ とすると，対称性変換のもとで積分測度は次のように変換する．

$$[d\varphi'] = [d\varphi] \det M \approx [d\varphi](1 + \delta\mathcal{J}). \tag{11.4}$$

ここで，

$$\begin{aligned} M^{AB}(x, y) &= \delta^{AB} \delta^{(4)}(x - y) + \frac{\delta\xi^A(x, \varphi)}{\delta\varphi^B(y)}, \\ \delta\mathcal{J} &= \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta\xi^A(x, \varphi)}{\delta\varphi^B(y)} \right) \end{aligned} \tag{11.5}$$

である．(Tr は添え字 A, B についてのトレースと汎関数のトレースを意味する．つまり，(A, x), (B, y) を行列要素の添え字とみなしてトレースをとるものとする.)

さらに，$\mathcal{S}(\varphi') = \mathcal{S}(\varphi + \xi) \approx \mathcal{S}(\varphi) + \delta_\xi \mathcal{S}$ となるので，これらを (11.3) に代入して，ξ について 1 次の項をまとめると

$$\langle -\delta_\xi \mathcal{S} + \int J_A \xi^A + \delta\mathcal{J} \rangle = 0 \tag{11.6}$$

を得る．ここで，山形括弧は汎関数積分による平均操作

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \mathcal{N}\int[d\varphi]\exp\left(-\mathcal{S}[\varphi]+\int J_A\varphi^A\right)\mathcal{O} \tag{11.7}$$

を表す．(11.6) は基本的なウォード–高橋恒等式である．J_A でベキ展開すると，グリーン関数についての無限個の関係式を与える．具体例でこれを示そう．

次式のユークリッド作用で表される N 個のスカラー場 φ^a $(a=1,2,\ldots,N)$ の理論を考えよう．

$$\mathcal{S} = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial\varphi^a\partial\varphi^a+\frac{1}{2}m^2\varphi^a\varphi^a+\lambda(\varphi^a\varphi^a)^2\right]. \tag{11.8}$$

この理論は変換

$$\varphi^a \to \varphi'^a \approx \varphi^a+\omega^{ab}\varphi^b \tag{11.9}$$

のもとで不変である．ここで，ω^{ab} は a,b について反対称であり，x^μ によらない．これはまた，$\omega^{ab}=\omega^A(T^A)^{ab}$ と表せる．$(T^A)^{ab}$ $(A=1,2,\ldots,\frac{1}{2}N(N-1))$ は $O(N)$（N 変数に対する直交変換）の生成子である．したがって，(11.8) は大域的な $O(N)$ 対称性をもつ．ここで，対称性が局所的でなく大域的であるのは，パラメータが x^μ によらないためである．

つぎに，汎関数積分での変数変換 $\varphi^a(x)\to\varphi'^a(x)+\omega^{ab}(x)\varphi^b(x)$ を考えよう．(変換 (11.9) ではパラメータ ω^{ab} は時空間によらないが，ウォード–高橋恒等式を得るには ω^{ab} を x^μ の関数と考える必要がある.）このとき，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= -\int\partial_\mu\omega^{ab}(\varphi^a\partial^\mu\varphi^b)\\ &= \int\omega^{ab}\,\partial_\mu(\varphi^a\partial^\mu\varphi^b)\end{aligned} \tag{11.10}$$

となる．変換 $\varphi^a(x)\to\varphi'^a(x)+\omega^{ab}(x)\varphi^b(x)$ について，行列 $M^{ab}(x,y)=(\delta^{ab}+\omega^{ab}(x))\delta^{(4)}(x-y)$ を得る．よって，ヤコビアンは φ によらない．また，$O(N)$ 変換の行列式は 1 なので，$\delta\mathcal{J}=0$ とすることができる．このとき，一般的な恒等式 (11.6) は

$$\langle -\partial_\mu(\varphi^a\partial^\mu\varphi^b-\varphi^b\partial^\mu\varphi^a)+J^a\varphi^b-J^b\varphi^a\rangle = 0 \tag{11.11}$$

となる．$Z[J]=e^{W[J]}$ をもちいると，これは

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\delta W}{\delta J^a(x)}\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta J^b(x)}+\frac{\partial}{\partial y^\mu}\left[\frac{\delta^2 W}{\delta J^a(x)\delta J^b(y)}\right]_{y\to x}\right]-(a\leftrightarrow b)$$

$$+J_a(x)\frac{\delta W}{\delta J^b(x)} - (a \leftrightarrow b) = 0 \tag{11.12}$$

と表される．$W[J]$ を J_a で展開すると，上式はこの理論の連結グリーン関数についての関係式を与える．

ω^{ab} が x^μ に依存しなければ，$\delta\mathcal{S} = 0$ となり，

$$\int d^4x \left(J_a(x)\frac{\delta W}{\delta J^b(x)} - J_b(x)\frac{\delta W}{\delta J^a(x)} \right) = 0 \tag{11.13}$$

を得る．$J_a = \delta\Gamma/\delta\varphi^a$ をもちいて $\Gamma[\varphi]$ で表すと，この上式は

$$\int d^4x \left(\Phi^a\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi^b} - \Phi^b\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi^a} \right) = 0 \tag{11.14}$$

となる．つまり，量子有効作用 $\Gamma[\Phi]$ は古典作用と同じ $O(N)$ 対称性をもつ．

11.3　電磁力学のウォード–高橋恒等式

ここでは，量子電磁力学 (QED) のゲージ不変性に関する WT 恒等式について議論しよう．QED の計算は次のユークリッド作用の汎関数積分により行われる．

$$\mathcal{S}_E(A,\bar{\psi},\psi) = \int d^4x \left[\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2 + Z_2\left[\bar{\psi}\left(\gamma\cdot\partial + m - \delta m\right)\psi - ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right]\right]. \tag{11.15}$$

一般に，作用のフェルミオン項には Z_1 と Z_2 が現れるが，前章で見たように BRST 不変な正則化を行うと $Z_1 = Z_2$ とできる．上式ではこのことを考慮した．

この作用は，ゲージ固定項 $(\partial\cdot A)^2$ があるため，ゲージ不変とならない．したがって，BRST 不変性とそれに付随した WT 恒等式だけが現れると期待される．しかしながら，ゲージ変換についての WT 恒等式を作用 (11.15) から導くことができる．その導出は BRST 恒等式の場合よりもやや複雑ではあるが，BRST の変換則すべてが必要とはならないのである程度簡略化できる．

まず，汎関数積分

$$
\begin{aligned}
Z[J,\eta,\bar\eta] &= \int d\mu[A,\psi,\bar\psi]\,\exp\left(-S_E(A,\psi,\bar\psi)+\int J\cdot A+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right)\\
&= \int d\mu[A',\psi',\bar\psi']\,\exp\left(-S_E(A',\psi',\bar\psi')+\int J\cdot A'+\bar\eta\psi'+\bar\psi'\eta\right)
\end{aligned}
\tag{11.16}
$$

を考えよう．2 行目は積分変数を別の記号で書き換えただけである．ここで，新しい変数を

$$
\begin{aligned}
A' &= A+\partial_\mu\theta,\\
\psi' &= e^{ie\theta}\,\psi,\\
\bar\psi' &= \bar\psi\,e^{-ie\theta}
\end{aligned}
\tag{11.17}
$$

ととる．これを (11.16) の 2 行目に代入し，θ を微小としてその 1 次の項について見てみよう．積分測度がこの変換のもとで不変であるとすると，

$$
\langle -\lambda\int\partial\cdot A\partial^2\theta+\int J\cdot\partial\theta+ie\int(\bar\eta\psi-\bar\psi\eta)\theta\,\rangle=0 \tag{11.18}
$$

を得る．つぎに，$\log Z=W$ と 1PI 頂点関数の生成汎関数 $\Gamma[A,\psi,\bar\psi]$ を導入しよう．

$$
\begin{aligned}
W[J,\eta,\bar\eta] &= -\Gamma[A,\psi,\bar\psi]+\int\bar\eta\psi+\bar\psi\eta+J\cdot A,\\
J^\mu &= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu},\\
\eta &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi},\quad \bar\eta=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}.
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

すると，(11.18) は次のように変形できる．

$$
-\lambda\int\theta\partial^2\partial\cdot A+\int\partial\theta\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta A}-ie\theta\left[\bar\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi\right]=0. \tag{11.20}
$$

（$A_\mu,\psi,\bar\psi$ は独立な場であり，(11.18) 同様，積分変数ではない．）Γ は場 $A,\psi,\bar\psi$ の汎関数なので，無限小ゲージ変換 (11.17) による変化は

$$
\delta_\theta\Gamma=\int\partial\theta\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta A}+\delta\bar\psi\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi}+\delta\psi\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}
$$

$$= \int \partial\theta \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta A} - ie\,\theta\left[\bar{\psi}\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} - \psi\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\right]$$

$$= \int \partial\theta \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta A} - ie\,\theta\left[\bar{\psi}\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\,\psi\right] \tag{11.21}$$

で与えられる．よって，(11.20) は

$$\delta_\theta\left[\Gamma - \frac{\lambda}{2}\int(\partial\cdot A)^2\right] = 0 \tag{11.22}$$

と書ける．ここで Γ^* を

$$\Gamma = \Gamma^* + \frac{\lambda}{2}\int(\partial\cdot A)^2 \tag{11.23}$$

で定義すると，(11.22) は Γ^* がゲージ不変であることを示す．Γ または Γ^* を頂点関数で展開すると，これは頂点関数についての関係式を導く．

例えば，Γ^* の 2 点関数の項

$$\Gamma^{*(2)} = \int A_\mu(x)V^{\mu\nu}(x,y)A_\nu(y) \tag{11.24}$$

について考えよう．微小ゲージ変換のもとで上式が不変であること，つまり (11.22) から

$$\partial_\mu V^{\mu\nu}(x,y) = 0 \tag{11.25}$$

となることがすぐにわかる．$V_{\mu\nu}(x,y) = (-\Box\delta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu)\delta^{(4)}(x-y) + \Pi_{\mu\nu}(x-y)$ と書き，フーリエ変換を行うと，これは

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \tag{11.26}$$

と同じことである．ローレンツ不変性により $\Pi_{\mu\nu}$ は k^2 の関数でなければならないので，条件 (11.26) から

$$\Pi_{\mu\nu} = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\,\Pi(k^2) \tag{11.27}$$

となる．

もう 1 つの例として，$\bar{\psi}\psi$ と $\bar{\psi}\psi A$ の項について考えよう．これらはゲージ変換のもとで混合するので，同時に考える必要がある．

$$\Gamma^{*(2,3)} = \int \bar{\psi}(x)F(x,z)\psi(z) - ie\int \bar{\psi}(x)V_\mu(x,y,z)\psi(z)A^\mu(y) + \cdots \tag{11.28}$$

と表すと，これが微小ゲージ変換のもとで不変であることから

$$ie\left[\int (\theta(z)-\theta(x))\,\bar{\psi}(x)F(x,z)\psi(z)+\int \theta(y)\bar{\psi}(x)\frac{\partial}{\partial y_\mu}V_\mu(x,y,z)\psi(z)\right]$$
$$-e^2\int (\theta(x)-\theta(z))\,\bar{\psi}(x)V_\mu(x,y,z)\psi(z)A^\mu(y)+\cdots=0 \quad (11.29)$$

がわかる．$\bar{\psi}\psi$ 項の係数をゼロとすると，

$$F(x,z)\left(\delta^{(4)}(z-y)-\delta^{(4)}(x-y)\right)+\frac{\partial}{\partial y_\mu}V_\mu(x,y,z)=0 \qquad (11.30)$$

を得る．(11.29) の A^μ 項については，A を 2 つ含む項の変分を考える必要があるので，(11.29) に現れる項をゼロとすることはできない．(11.30) に次のフーリエ変換をもちいよう．

$$V_\mu(x,y,z)=\int_{p,q}V_\mu(p,q)e^{ip(x-y)}e^{-iq(z-y)},$$
$$F(x,z)\delta^{(4)}(z-y)=\int_{p,q}F(p)e^{ip(x-y)}e^{-iq(z-y)}, \qquad (11.31)$$
$$F(x,z)\delta^{(4)}(x-y)=\int_{p,q}F(q)e^{ip(x-y)}e^{-iq(z-y)}.$$

最後の 2 式でそれぞれ $q\to q+p$, $p\to p+q$ とすると，通常のフーリエ変換の形となる．(11.31) をもちいると，(11.30) は

$$F(p)-F(q)+i(q-p)^\mu V_\mu(p,q)=0 \qquad (11.32)$$

と変形される．この式を $q-p$ の微小値で展開すると，

$$-\frac{\partial F}{\partial p^\mu}+iV_\mu(p,p)=0 \qquad (11.33)$$

を得る．(11.32) と (11.33) は WT 恒等式が最初に導かれた形である．$F(p)=i\gamma\cdot p+m+\Sigma(p)$, $V_\mu(p,q)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p,q)$ であるので，これらの式は電子の自己エネルギー $\Sigma(p)$ と頂点関数補正 $\Gamma_\mu(p,q)$ に関する恒等式を与えることがわかる．

11.4 離散的対称性

つぎに，ゲージ理論における離散的な対称性について議論しよう．ここで

離散的対称性とは，パリティ，荷電共役，時間反転などの対称性のことである．有効作用のゲージ不変性を表す WT 恒等式とともにもちいると，これらは作用（または有効作用）の形を決めるのに非常に有効であり，さらに，これらをもちいると摂動論に限らず一般的に成立する低エネルギー理論を導くことができる．

汎関数積分表示をもちいると，離散的対称性は次のように理解できる．まず，$\tilde{\varphi}$ を離散的対称性のもとでの場の変数 φ の変換であるとしよう．このときグリーン関数

$$\tilde{G} = \mathcal{N} \int [d\varphi]\, e^{i\mathcal{S}(\varphi)}\ \tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\cdots\tilde{\varphi}(x_N) \tag{11.34}$$

は変換後の粒子状態の時間発展を記述する．作用が $\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\tilde{\varphi})$ をみたし，測度も同様の性質をもつとすると，

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= \mathcal{N} \int [d\varphi]\, e^{i\mathcal{S}(\varphi)}\ \tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\cdots\tilde{\varphi}(x_N) \\
&= \tilde{G} = \mathcal{N} \int [d\tilde{\varphi}]\, e^{i\mathcal{S}(\tilde{\varphi})}\ \tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\cdots\tilde{\varphi}(x_N) \\
&= G
\end{aligned} \tag{11.35}$$

と書ける．ここで，変換 $\varphi \to \tilde{\varphi}$ は積分変数の書き換えにすぎない．以下では，このような変換をパリティ，荷電共役，時間反転について考えよう．これらの対称性にはミンコフスキー計量が必要となる場合があるので，この節ではミンコフスキー空間での汎関数積分をもちいることにする．

パリティ

パリティは $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$ の変換に対応する．これをディラック・スピノールに施すと

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \gamma^0 \chi(-\boldsymbol{x}, t) \tag{11.36}$$

となる．ここで，$\chi(\boldsymbol{x}, t)$ は $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ のパリティ写像あるいはパリティ変換である．ゲージ場のパリティ変換は

$$\begin{aligned}
A_0(\boldsymbol{x}, t) &= \tilde{A}_0(-\boldsymbol{x}, t) \\
A_i(\boldsymbol{x}, t) &= -\tilde{A}_i(-\boldsymbol{x}, t)
\end{aligned} \tag{11.37}$$

で与えられる．ただし，チルダはパリティ変換されたゲージ場を表す．

QED のパリティ不変性は理論に現れるさまざまな項を調べることで確認できる．例えば，$\int \bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi$ を考えよう．$\tilde{x} = (-\boldsymbol{x}, t)$ と書くと，

$$
\begin{aligned}
\int d^4x\ \bar{\psi} i\gamma\cdot\partial\psi &= \int d^4x\ \chi^\dagger(\tilde{x}) i\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^0\chi(\tilde{x}) \\
&= \int d^4x\ \chi^\dagger(\tilde{x}) i(\partial_0 - \gamma^0\gamma^i\partial_i)\chi(\tilde{x}) \\
&= \int d^4x\ \bar{\chi}(\tilde{x}) i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\mu}\chi(\tilde{x}) \\
&= \int d^4\tilde{x}\ \left(\bar{\chi} i\gamma^\mu\partial_\mu\chi\right)_{x\to\tilde{x}}
\end{aligned}
\tag{11.38}
$$

となる.（最後の極限操作は測度の変数を x から $\tilde{x}$ に置き換えるためのものである.）(11.38) はディラック・ラグランジアンの運動項がパリティ不変であることを示している.

ディラック理論で標準的な双線形共変量 (bilinear covariant) のパリティ変換は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi(x) &= \bar{\chi}\chi(\tilde{x}), \\
\bar{\psi}\gamma^5\psi(x) &= -\bar{\chi}\gamma^5\chi(\tilde{x}),
\end{aligned}
\tag{11.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^0\psi(x) &= \bar{\chi}\gamma^0\chi(\tilde{x}), \\
\bar{\psi}\gamma^i\psi(x) &= -\bar{\chi}\gamma^i\chi(\tilde{x}),
\end{aligned}
\tag{11.40}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi(x) &= -\bar{\chi}\gamma^0\gamma^5\chi(\tilde{x}), \\
\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi(x) &= \bar{\chi}\gamma^i\gamma^5\chi(\tilde{x}),
\end{aligned}
\tag{11.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\left[\gamma^0, \gamma^i\right]\psi(x) &= -\bar{\chi}\left[\gamma^0, \gamma^i\right]\chi(\tilde{x}), \\
\bar{\psi}\left[\gamma^i, \gamma^j\right]\psi(x) &= \bar{\chi}\left[\gamma^i, \gamma^j\right]\chi(\tilde{x}).
\end{aligned}
\tag{11.42}
$$

したがって，$\bar{\psi}\psi$ はスカラー，$\bar{\psi}\gamma^5\psi$ は擬スカラー，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はベクトル，$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ は軸性ベクトル，$\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi$ は 2 階のテンソルである.

パリティの定義 (11.36) から

$$
\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi(\boldsymbol{x}, t) = \gamma^0\,\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\chi(-\boldsymbol{x}, t) \tag{11.43}
$$

を示すこともできる．よって，$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$ と $\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi$ のカイラル射影はパリティによって互いに変換する．1 種類のカイラルフェルミオンしかない理論や（例えば $A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi$ のように）ゲージ場が 1 種類のカイラル射影としか結合しない理論の場合はパリティが保存しない．弱い相互作用の標準模型はそのような理論の 1 つである．

荷電共役

これは $e^+ \leftrightarrow e^-$ のような電荷の交換に対応する．この変換は

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C\bar{\chi}^T(x), \\ A_\mu(x) &= -\tilde{A}_\mu(x) \end{aligned} \tag{11.44}$$

で与えられる．ここで，C は荷電共役行列であり，

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \tag{11.45}$$

で定義される．γ 行列は代数

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{11.46}$$

で定義されたのだが，この式の転置をとると $\gamma^{\mu T}$ も同じ代数に従うことがわかる．よって，1 章で述べたクリフォード代数の一般論から，関係式 (11.45) をみたす行列 C が存在する．行列 C の具体的な形は γ^μ をどのような表現に選ぶかによって変化する．例えば，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{11.47}$$

とすると

$$C = i\gamma^0\gamma^2, \qquad C^{-1} = -C = C^\dagger \tag{11.48}$$

となる．この場合，フェルミオン場は $\psi(x) = C\gamma^0\chi^*(x) = -i\gamma^2\chi^*(x)$ と変換する．

このような規則をもちいるとラグランジアンの任意の項の C 不変性を簡単に調べることができる．例えば，QED における電子の運動項を考えると

$$\bar{\psi}\gamma\cdot(\partial - ieA)\psi = \chi^T\gamma^0 C^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu)C\gamma^0\chi^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \chi^T \gamma^0 \gamma^{0T} \gamma^{\mu T} \gamma^0 (\partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu) \chi^* \\
&= -\partial_\mu \chi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \chi - ie\tilde{A}_\mu \chi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \chi \\
&= -\partial_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi - ie\tilde{A}_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi
\end{aligned} \tag{11.49}
$$

を得る．ただし，(11.45) をもちいた．3 行目に現れるマイナス符号はグラスマン数である χ^T と χ^* の入れ換えによる．作用の計算では部分積分を行うことができるので，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(A, \psi, \bar{\psi}) &= \int d^4x \; \bar{\psi} \, i\gamma \cdot (\partial - ieA) \psi \\
&= \int d^4x \; i \left[-\partial_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi - ie\tilde{A}_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \right] \\
&= \int d^4x \; i \left[\bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi - ie\tilde{A}_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \right] \\
&= \mathcal{S}(\tilde{A}, \chi, \bar{\chi})
\end{aligned} \tag{11.50}
$$

となる．ラグランジアンの他の項の C 不変性も同様に調べることができる．標準的な双線形共変量については

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &= \bar{\chi}\chi, \\
\bar{\psi}\gamma^5\psi &= \bar{\chi}\gamma^5\chi, \\
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= -\bar{\chi}\gamma^\mu\chi, \\
\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^5\chi, \\
\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi &= \bar{\chi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\chi
\end{aligned} \tag{11.51}
$$

となる．$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ なので $C^{-1}\gamma^5 C = \gamma^{5T}$ となることに注意しよう．

非アーベル型ゲージ場があるとき，荷電共役の概念はリー代数の共役にも関わる．例えば，$\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$ の項を考えよう．ただし，ψ はゲージ群のある表現として変換する．ψ はリー代数の行列表現 t^a が線形変換として作用するような列ベクトルである．$A_\mu = -it^a A^a_\mu$ であり，t^a はリー代数の生成子である．この生成子の表現は ψ に対応するものである．荷電共役の変換 (11.44) をもちいると，

$$
\begin{aligned}
-iA^a_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi &= -iA^a_\mu \, \chi^T \gamma^0 C^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu t^a C \gamma^0 \chi^* \\
&= -iA^a_\mu \, \chi^T \gamma^0 \gamma^{0T} \gamma^{\mu T} \gamma^0 t^a \chi^*
\end{aligned}
$$

$$= iA^a_\mu \chi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu t^{aT} \chi \tag{11.52}$$

を得る．この項は，ゲージ場の荷電共役を $t^a A^a_\mu = (-t^{aT})\tilde{A}^a_\mu$ と定義すれば不変である．この場合，$-iA^a_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi = -i\tilde{A}^a_\mu \bar{\chi}\gamma^\mu t^a \chi$ となる．この荷電共役の定義はリー代数の共役と完全に対応している．リー代数の交換関係を $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ で表し，t^a がこの行列表現を与えるとすると，$-t^{aT}$ も同様にリー代数の行列表現を与えることがわかる．変換 $t^a \to -t^{aT}$ はリー代数の自己同形 (automorphism) である．代数表現の言葉では，これは与えられた表現をその共役で置き換えていることに対応する．したがって，$A^a_\mu t^a = \tilde{A}^a_\mu(-t^{aT})$ は確かに荷電共役の定義として正しいことがわかる．

時間反転

時間反転の変換は $(\boldsymbol{x}, t) \to (\boldsymbol{x}, -t) \equiv \tilde{x}$ で定義される．場の時間反転は

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}, t) &= \gamma^5 C \chi^*(\boldsymbol{x}, -t), \\ A_0(\boldsymbol{x}, t) &= \tilde{A}_0(\boldsymbol{x}, -t), \\ A_i(\boldsymbol{x}, t) &= -\tilde{A}_i(\boldsymbol{x}, -t) \end{aligned} \tag{11.53}$$

で与えられる．時間反転は反ユニタリー変換である．演算子をもちいると，これは次のことを意味する．すなわち，演算子 A, B の変換を $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ とすると，$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ となる．

つぎに，変数変換 (11.53) のもとで汎関数積分で表される QED の作用のさまざまな項がどのように変化するか見てみよう．ボソン項が不変であること，例えば $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(\tilde{A})$ は簡単にわかる．ディラック作用の運動項は場の並べかえと部分積分を行うことにより，次のように書けることがわかる．

$$\begin{aligned} &\int d^4x \; i\bar{\psi}\gamma \cdot (\partial - ieA)\psi \\ &\quad = i\int d^4x \left[\chi^T C^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^5 C \chi^* - ie\chi^T C^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 C \chi^* A_\mu\right] \\ &\quad = i\int d^4x \; [\chi^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 \partial_\mu \chi + ie\chi^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 \chi A_\mu] \\ &\quad = i\int d^4x \; [\bar{\chi}(\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i)\chi + ie\bar{\chi}(\gamma^0 A_0 - \gamma^i A_i)\chi] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i\int d^4x \left[-\left(\bar{\chi}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}\chi\right) + ie\bar{\chi}\gamma^\mu \tilde{A}_\mu(\tilde{x})\chi\right] \\
&= -\int d^4\tilde{x} \left[\bar{\chi}(\tilde{x})\, i\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} - ie\tilde{A}_\mu(\tilde{x})\right)\chi(\tilde{x})\right] \\
&= -\int d^4x\ \bar{\chi}\, i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie\tilde{A}_\mu)\chi. \qquad (11.54)
\end{aligned}
$$

最後のステップで積分変数 $\tilde{x}$ を x と書き換えた．時間反転された場を代入してもマイナス符号を除き同じ項が得られる．同様な結果が QED の質量項についても得られるので，作用のフェルミオン項は

$$\mathcal{S}(A, \psi, \bar{\psi}) = -\mathcal{S}(\tilde{A}, \chi, \bar{\chi}) \qquad (11.55)$$

と表せる．符号の変化は時間反転変換の反ユニタリー性に関係している．S 行列のレベルではこれは，当然予想されるように，散乱過程を時間反転された過程に置き換えることに対応する．生成汎関数 Z のレベルでは，QED の不変性はフェルミオンの積分から得られる行列式つまり $\det(i\gamma\cdot(\partial - ieA) - m)$ が $\det[-(i\gamma\cdot(\partial - ieA) - m)]$ と等しいことから導かれる．

ファリーの定理

荷電共役のもとでの QED の不変性から光子の外線が奇数本しかないファインマン図の寄与はゼロになるという結果が導かれる．これはファリー (Furry) の定理と呼ばれ，次のように簡単に導くことができる．変数変換 $\psi \to C\gamma^0\chi^*$ を汎関数積分で行う．電磁ポテンシャル A_μ は不変とする．(11.50) からフェルミオン作用について $\mathcal{S}(A, \psi, \bar{\psi}) = \mathcal{S}(\tilde{A}, \chi, \bar{\chi}) = \mathcal{S}(-A, \chi, \bar{\chi})$ を得る．ボソン部分は A について不変なので，理論全体について

$$\mathcal{S}(A, \psi, \bar{\psi}) = \mathcal{S}(-A, \chi, \bar{\chi}) \qquad (11.56)$$

が確かに成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int [dAd\psi d\bar{\psi}]\, e^{i\mathcal{S}(A,\psi,\bar{\psi})} e^{\int J^\mu A_\mu} \\
&= \int [dAd\chi d\bar{\chi}]\, e^{i\mathcal{S}(-A,\chi,\bar{\chi})} e^{\int J^\mu A_\mu} \\
&= \int [dAd\chi d\bar{\chi}]\, e^{i\mathcal{S}(A,\chi,\bar{\chi})} e^{-\int J^\mu A_\mu}
\end{aligned}
$$

$$= Z[-J] \tag{11.57}$$

となる．これより，光子の外線が奇数個あるようなファインマン図の寄与はすべてゼロとなることがすぐにわかる．(もしフェルミオンの外線がある場合は，フェルミオンの源となる電荷が現れるので，この限りではない．)

CPT 定理

QED は C, P, T の離散的対称性をもつが，素粒子の標準模型はパリティ不変性を破り，また微小な範囲ではあるが，T 不変性を破る．しかし，理論がエルミートな局所密度の積分で表されるハミルトニアン相互作用項をもつローレンツ不変な理論であり，また，場が適切なスピン統計関係によって量子化されているならば，CPT つまり 3 つの変換の組み合わせは常に保存される．これは有名な CPT 定理である．この定理は変換の積の順序に関わらず成立する．

11.5　コンプトン散乱の低エネルギー定理

ゲージ不変性を表す WT 恒等式 (11.22) は QED の Γ^* がゲージ不変であることを示す．これを離散的対称性と組み合わせるとある散乱過程についての一般的な低エネルギー定理を導くことができる．ここでは，コンプトン散乱を例にこのことを示そう．入射するフェルミ粒子の運動量を p，散乱後のフェルミ粒子の運動量を p' とし，電子の入射・散乱の運動量をそれぞれ k, k' とする．ここでは $p = p'$ および $k = k'$ となる前方散乱の振幅を考えよう．前方散乱の運動学的な不変量は $\omega = p \cdot k/m$ だけであり，ここでは ω について 1 次のオーダーで散乱振幅を計算しよう．

8 章で議論したように Γ は量子有効作用であり，量子効果はすでにこのなかに含まれている．したがって，量子的な S 行列を導く Γ を作用としてもちいて古典的な散乱理論を考えることができる．すなわち，ツリー・ダイヤグラムのみを考えることで Γ から S 行列を構成することができる．Γ^* を光子の場 A_μ でベキ展開してみよう．コンプトン散乱においては入射する光子と放射する光子が 1 つずつあるので A_μ の 1 次と 2 次の項のみが必要となる．

（Γ から光子のループ・ダイヤグラムを導く必要はないので，A の高次の項は除かれる.）また，ここでは低エネルギー散乱に興味があるので，(11.28) のような頂点関数について運動量や場の微分の数でベキ展開したものを考えることができる．例えば，フェルミ粒子の 2 点関数は

$$\Gamma^*_{\bar{\psi}\psi} = \int \bar{\psi}(x)\, K(x,y)\psi(y) \tag{11.58}$$

と表せる．方程式 $K\psi = 0$ は通常のディラック方程式の平面波解を解として持たなければならない．これは，K が $K(p) = (\gamma \cdot p - m)h(s)$ と書けることを意味する．ここで，$h(s)$ は $s = (p^2 - m^2)/m^2$ で展開できる関数であり，場が正しく正則化されていることを保証するため，$h(0) = 1$ が必要となる．（もし h が s ではなく p^2 の関数であるとすると，$h(p^2 = m^2) = 1$ が必要となるが，このとき級数展開を s で書き直すことができる.）相互作用のある理論では，WT 恒等式により，この 2 点関数は光子の頂点関数と関係する．座標空間では，運動量は微分であり，微分を含む項はゲージ不変ではない．光子の頂点関数は，2 点関数と一緒になってゲージ不変性を保証するような関数である．ゲージ不変性の要請から微分は共変微分 $\partial \to D = \partial - ieA$ で置き換えられなければならないので，2 点関数の一般形は次のように簡単に書き下すことができる．

$$\Gamma^*_{\bar{\psi}\psi} = \frac{1}{2}\int \bar{\psi}\,\left[h(S)\,(i\gamma \cdot D - m) + (i\gamma \cdot D - m)\,h(S)\right]\psi. \tag{11.59}$$

ここで，$m^2 S = -D^2 - m^2$ である．S は $\gamma \cdot D$ と交換しないので，h と $\gamma \cdot D$ の順序が重要である．上式の対称的な順序づけは C 不変性と整合的である．また，これはコンプトン散乱に現れる自由光子の存在とも矛盾しない．関連する（S と D の）交換子は

$$\bar{\psi}[i\gamma \cdot D, -D^2]\psi = -2e\bar{\psi}\gamma^\mu F_{\mu\nu}D_\nu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(D_\nu F_{\mu\nu}) \tag{11.60}$$

で与えられる．光子の伝播関数を必要としないコンプトン散乱の計算では，運動方程式をみたす光子場のみを考えればよいので，第 2 項は寄与しない[2]．また，第 1 項は C 不変性より排除できる．これより，(11.59) で行った対称

[2] ［訳註］7.4 節にあるように，コンプトン散乱のツリー・ダイヤグラムに現れる光子は運動方程式をみたす外線にのみ現れる．

化された順序づけが適切であることがわかる

2 点関数以外にも次のような項を考えることができる.

$$\Gamma^* = \int \frac{ie}{16m}\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] f(S)\psi F_{\mu\nu} + aF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\bar{\psi}\psi + \cdots . \tag{11.61}$$

F が 2 つある項も一般に非局所的な項を与える. 光子の運動量 k をもちいると, これはすでに k^2 のオーダーであるので, これ以上高階の微分を含む項は低エネルギーには寄与しない. 実際, この項自体もここでの計算では無視できる. 同様に, (11.61) の第 1 項では $f(0)$ のみが必要となる. 高次の項は k がフェルミ粒子の質量に比べて小さいときには無視できる. $f(0)$ は粒子の異常磁気モーメントに関係しており, 実際, この項をディラック理論の非相対論的極限と比較すると, $f(0) = g - 2$ となることがわかる.

低エネルギーのコンプトン散乱では, $h(S) \approx 1 + h_1 S = 1 + h_1(m^2 s - eA\cdot p - ep\cdot A + e^2A^2)/m^2$ と近似できるので, 関与する項は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Gamma^* &= \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(1')} + \Gamma^{(1'')} + \Gamma^{(2)},\\
\Gamma^{(0)} &= \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)h(s)\psi,\\
\Gamma^{(1)} &= e\bar{\psi}\frac{1}{2}\left[\gamma\cdot Ah(s) + h(s)\gamma\cdot A\right]\psi,\\
\Gamma^{(1')} &= \frac{ie}{16m}(g-2)\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi F_{\mu\nu},\\
\Gamma^{(1'')} &= \frac{eh_1}{2m^2}\bar{\psi}\Big[(i\gamma\cdot\partial - m)(A\cdot P + P\cdot A)\\
&\qquad + (A\cdot P + P\cdot A)(i\gamma\cdot\partial - m)\Big]\psi,\\
\Gamma^{(2)} &= \frac{e^2h_1}{2m^2}\bar{\psi}\left[(i\gamma\cdot\partial - m)A^2 + A^2(i\gamma\cdot\partial - m)\right]\psi\\
&\quad - \frac{e^2h_1}{2m^2}\bar{\psi}\left[\gamma\cdot A(A\cdot P + P\cdot A) + (A\cdot P + P\cdot A)\gamma\cdot A\right]\psi.
\end{aligned} \tag{11.62}$$

ここで, $P = i\partial$ である. また, (11.61) の F^2 項は前述の理由から落とした.

A が 2 つある $\Gamma^{(2)}$ の項から考えよう. ここで ψ と $\bar{\psi}$ は運動方程式をみたす自由粒子の波動関数に置き換えられる. よって, $\Gamma^{(2)}$ の第 1 項はコンプトン散乱に寄与しない. 第 2 項からは $(2p+k)\cdot e$ あるいは $(2p+k)\cdot e'$ が現れる. 低エネルギーでは $p\cdot e = 0$ のゲージを選ぶことができるので,

$p \cdot e' \approx 0$ を得る．（これは入射フェルミ粒子の静止系で考えると明らかであろう．）$\Gamma^{(2)}$ 項はここで考えている光子運動量のオーダーには寄与しない．$(A \cdot P + P \cdot A)$ を含む $\Gamma^{(1'')}$ 項も同様の理由から無視できる．よって，ここでの近似に重要な項は $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(1')}$ である．これらから散乱振幅を求める際に，s が $s = ((p+k)^2 - m^2)/m^2 = 2p \cdot k/m^2 = 2\omega/m$ および $s = ((p-k)^2 - m^2)/m^2 = -2\omega/m$ となる $h(s)$ をもちいる必要がある．

$\Gamma^{(1)}$ による散乱振幅は，2 次のオーダーで，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} = -e^2 \bar{u}_p \Bigg[& \gamma \cdot e' \left(1 + h_1 \frac{\omega}{m}\right)^2 \frac{i}{(\gamma \cdot (p+k) - m)(1 + 2h_1\omega/m)} \gamma \cdot e \\
& + \gamma \cdot e \left(1 - h_1 \frac{\omega}{m}\right)^2 \frac{i}{(\gamma \cdot (p-k) - m)(1 - 2h_1\omega/m)} \gamma \cdot e' \Bigg] u_p \\
\approx & -ie^2 \frac{1}{2p \cdot k} \bar{u}_p \left[\gamma \cdot e' \gamma \cdot k \gamma \cdot e + \gamma \cdot e \gamma \cdot k \gamma \cdot e'\right] u_p \\
\approx & -i \frac{e^2}{m} e \cdot e'
\end{aligned}
\tag{11.63}
$$

となる．ただし，$p \cdot e = 0$ と選んでいるので，

$$
(\gamma \cdot p + m)\, \gamma \cdot e u_p = -\gamma \cdot e(\gamma \cdot p + m) u_p = 0 \tag{11.64}
$$

となることおよび e' についての同様な結果をもちいた．

$\Gamma^{(1)}$ と $\Gamma^{(1')}$ の積はこのオーダーでゼロとなる．$\Gamma^{(1')}$ の寄与は，2 次のオーダーで，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1')} = \frac{e^2(g-2)^2}{64m^2} \bar{u}_p \Bigg[& [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu e'_\nu \frac{i}{\gamma \cdot (p+k) - m} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] k_\alpha e_\beta \\
& + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu e_\nu \frac{i}{\gamma \cdot (p-k) - m} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] k_\alpha e'_\beta \Bigg] u_p
\end{aligned}
\tag{11.65}
$$

となる．伝播関数を有理化して，分子を変形し $(\gamma \cdot k)^2 = 0$ をもちいると，上式は

$$
\mathcal{M}^{(1')} = \frac{ie^2}{16m^2} (g-2)^2 \bar{u}_p \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma^\alpha] u_p\, k_\mu e'_\nu e_\alpha \tag{11.66}
$$

となる．ここで，k の高次の項を無視した．$\gamma \cdot p u_p = m u_p$ であるので，

$$
\bar{u}_p \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma^\alpha] u_p = \frac{1}{2m} \bar{u}_p \left[\gamma \cdot p \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma^\alpha] + \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma^\alpha] \gamma \cdot p\right] u_p \tag{11.67}
$$

と書ける．γ 行列の計算から

$$\bar{u}_p\gamma^\mu[\gamma^\nu,\gamma^\alpha]u_p=\bar{u}_p\left[\frac{p^\mu}{m}[\gamma^\nu,\gamma^\alpha]+\frac{2p^\alpha}{m}\gamma^\mu\gamma^\nu-\frac{2p^\nu}{m}\gamma^\mu\gamma^\alpha\right]u_p \tag{11.68}$$

を得る．これを (11.66) に代入すると，

$$\mathcal{M}^{(1')}=\frac{e^2}{8m^2}(g-2)^2\,\omega\,\bar{u}_p\sigma^i u_p(e'\times e)_i \tag{11.69}$$

となる．

一般に，前方散乱振幅は

$$\mathcal{M}=i\bar{u}_p\left[f_1(\omega)\,e\cdot e'+i\omega f_2(\omega)\,(e'\times e)_i\,\sigma^i\right]u_p \tag{11.70}$$

と表示することができる．ここで，$f_1(\omega)$ と $f_2(\omega)$ は（光子の）ヘリシティ保存とヘリシティ変化の確率振幅をそれぞれ与える．(11.63) と (11.69) の結果を組み合わせると，低エネルギーでの前方方向の全散乱振幅

$$\mathcal{M}\approx i\bar{u}_p\left[-\frac{e^2}{m}e\cdot e'-i\omega\frac{e^2}{8m^2}(g-2)^2(e'\times e)_i\sigma^i\right]u_p \tag{11.71}$$

が求まる．すなわち，

$$\begin{aligned} f_1(0)&=-\frac{e^2}{m},\\ f_2(0)&=-\frac{e^2}{8m^2}(g-2)^2 \end{aligned} \tag{11.72}$$

となる．低エネルギー前方コンプトン散乱は光子と散乱するフェルミ粒子の電荷と磁気モーメントによって完全に決まる．この結果は一般性の高いものである．ここでは摂動論の仮定を一切もちいていない．また，電磁相互作用だけがあると仮定したわけでもない．QED のもつ不変性と低エネルギー展開をもちいただけである．よって，この結果は陽子などの複合粒子にも適用される．

陽子などの場合に (11.72) を直接確かめることは容易ではない．通常これは，分散関係をもちいて，偏極光子と標的フェルミ粒子の散乱断面積の和則に変形される．この和則はドレル–ハーン (Drell–Hearn) の和則として知られており，実験データとよく一致している．

参考文献

1. QED の WT 恒等式は，汎関数形式ではないが，J.C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950); Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6**, 371 (1957) で与えられた.

2. ファリーの定理は W.H. Furry, Phys. Rev. **51**, 125 (1937) による.

3. CPT 定理の証明については，例えば，R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W.A. Benjamin, Inc. (1964) を参照されたい.

4. 低エネルギー定理の原論文は F. Low, Phys. Rev. **96**, 1428 (1954); **110**, 1178 (1958); M. Gell-Mann and M.L. Goldberger, Phys. Rev. **96**, 1433 (1954); S.D. Drell and A.C. Hearn, Phys. Rev. Lett. **16**, 908 (1966) である.

第 12 章

自発的対称性の破れ

12.1　連続的大域対称性の自発的破れ

この章では，自発的対称性の破れあるいは対称性の南部–ゴールドストン表示についてより詳しくみていこう．まず，連続的な大域対称性を取り上げる．基底状態あるいは真空状態は，自発的に破れる対称性の生成子 Q^A をもちいて，$Q^A|0\rangle \neq 0$ と特徴づけられるが，これは計算上あまり便利な表式ではない．そこで，これを別の形で表すことを考えよう．A_α をリー群 G で表される連続的対称性のもとで非自明に変換する演算子とする．無限小変換の場合，$\delta A_\alpha = (t^A_{\alpha\beta}\theta^A)\, A_\beta$ となる．ここで θ^A は群のパラメータ，$t^A_{\alpha\beta}$ は G のリー代数の生成子であり，その表現は A_α の属する行列表現となる．量子論において Q^A は群の変換を生成するので，これは

$$
\begin{aligned}
i\delta A_\alpha &\equiv [A_\alpha, Q\cdot\theta] \\
&= i(t^A_{\alpha\beta}\theta^A)\, A_\beta
\end{aligned}
\tag{12.1}
$$

と書けることを意味する．この関係式の有限化は

$$
e^{iQ\cdot\theta} A_\alpha\, e^{-iQ\cdot\theta} = \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta)\, A_\beta \tag{12.2}
$$

で与えられる．ここで $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta)$ は，A_α の属する表現において，パラメータ θ^A に対応する変換を表す行列である．この値の真空（基底状態）での期待値は

$$
\langle 0|e^{iQ\cdot\theta} A_\alpha\, e^{-iQ\cdot\theta}|0\rangle = \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta)\, \langle 0|A_\beta|0\rangle \tag{12.3}
$$

となる．上式より，$Q^A|0\rangle = 0$ であれば $\langle 0|A_\alpha|0\rangle = \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta)\,\langle 0|A_\beta|0\rangle$ となることがわかる．$\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta)$ はすべての θ について恒等行列ではない．というのも，A_α は非自明に変換されるからである．これより $\langle 0|A_\alpha|0\rangle$ はゼロでなければならないので，次の関係

$$Q^A|0\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle 0|A_\alpha|0\rangle = 0 \tag{12.4}$$

が G のもとで不変でないすべての A_α について成り立つ．この主張の対偶をとると，G のもとで不変でない演算子がゼロでない真空期待値をもつならば対称性 G は自発的に破れる，となる．これは，G のもとで不変でない演算子に真空期待値を与えることで，自発的対称性の破れが誘引されることを意味する．もちろん，真空期待値を任意に与えることはできない．基底状態はハミルトニアンを最小にすることで得られるので，これは，自発的対称性の破れが起こる理論ではハミルトニアンは G のもとで非自明に変換する生成演算子の期待値がゼロとならないように最小化されることを意味する．

基底状態の半古典的構成

半古典的な手法が有効な理論においては，自発的対称性の破れをもつ基底状態を具体的に構成することが可能である．このことを $U(1)$ 対称性の自発的破れを例に挙げて説明しよう．そこで，次の作用をもつ複素スカラー場 φ の理論を考えよう．

$$\mathcal{S} = \int d^4x \, \left[\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - a\,\varphi^*\varphi - b\,(\varphi^*\varphi)^2\right]. \tag{12.5}$$

これは明らかに $U(1)$ 対称性をもち，場の変換は $\varphi \to \varphi' = e^{i\theta}\varphi$ で与えられる．(12.5) に対応するハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \, \left[\partial_0\varphi^*\partial_0\varphi + \nabla\varphi^*\nabla\varphi + a\,\varphi^*\varphi + b\,(\varphi^*\varphi)^2\right] \tag{12.6}$$

となる．この基底状態を古典的に選ぶのは簡単である．単にハミルトニアンを最小化すればよいだけである．H を最小にする場の配位 $(\varphi, \partial_0\varphi)$ が基底状態の配位に相当する．この配位はパラメータ a, b に依存する．もし b が負であるなら，H は $\partial_0\varphi = 0$, $\varphi \to \infty$ ととることで最小化され，このとき $H \to -\infty$ となる．よって，基底状態は存在せず，これは物理的ではない．し

たがって，$b>0$ を要請しなければならない．このとき次の 2 つの場合が考えられる．

(1) $a>0$. この場合，すべての H の項は正となるので H は $\partial_0\varphi=0, \varphi=0$ の配位で最小となる．

(2) $a<0$. この場合，ハミルトニアンは

$$H=\int d^3x\left[\partial_0\varphi^*\partial_0\varphi+\nabla\varphi^*\nabla\varphi+b\left(\varphi^*\varphi-v^2\right)^2\right]-\int d^3x\,\frac{|a|^2}{4b} \tag{12.7}$$

と変形できる．ただし，$v^2=|a|/2b$ である．H を最小にする配位は明らかに

$$\begin{gathered}\partial_0\varphi=0, \qquad \nabla\varphi=0,\\ \varphi^*\varphi=v^2 \quad \text{または} \quad \varphi=ve^{i\alpha}\end{gathered} \tag{12.8}$$

で与えられる．($\partial_\mu\varphi=0$ なので α は x によらない．)

古典的な値は量子論では期待値として表される．φ に対応する演算子を ϕ で表し，$\phi^*\phi$ のような積の期待値が

$$\langle 0|\phi^*\phi|0\rangle=\langle 0|\phi^*|0\rangle\,\langle 0|\phi|0\rangle+\mathcal{O}(\hbar) \tag{12.9}$$

で与えられることに注意すると，少なくとも半古典的には基底状態の特性は $\langle 0|\phi|0\rangle=v$ と表して議論することができる．ここで，v は古典的なハミルトニアンを最小化して得られる．したがって，次の 2 つの可能性がある．

1. $a>0$ 　　$\langle 0|\phi|0\rangle=0,$
2. $a<0$ 　　$\langle 0|\phi|0\rangle=\sqrt{|a|/2b}\,e^{i\alpha}+\mathcal{O}(\hbar).$

$U(1)$ 変換のもとで $\phi\to\phi'=e^{i\theta}\phi$ となるので，ϕ が基底状態で期待値をもつ 2 番目の場合は $U(1)$ 対称性の自発的破れに対応する．

基底状態（真空状態）の波動関数は次のように具体的に決めることができる．1 番目の場合 $\langle 0|\phi|0\rangle=0$ について考えよう．まず，実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 をもちいて $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$ と書く．つぎにモード展開

$$\phi_i(x)=\sum_k q_{ik}u_k(\boldsymbol{x}) \tag{12.10}$$

$(i=1,2)$ を導入する．ここで，$u_k(x)$ は体積 $V=L^3$ の箱のなかにある $\boldsymbol{x}$ の実関数完全系である．固有値 $\boldsymbol{k}^2$ をもつ $-\nabla^2$ の固有関数として $u_k(\boldsymbol{x})$ を

とることができる．具体的には，∂V 上での境界条件を $\phi = 0$ とすると[1]，

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\frac{n_1 \pi x_1}{L} \sin\frac{n_2 \pi x_2}{L} \sin\frac{n_3 \pi x_3}{L} \tag{12.11}$$

となる．ここで

$$\int d^3x \; u_k(\boldsymbol{x}) u_l(\boldsymbol{x}) = \delta_{kl} \tag{12.12}$$

が成り立つ．同様に，

$$\partial_0 \phi_i = \sum_k p_{ik} u_k(\boldsymbol{x}) \tag{12.13}$$

と書ける．正準交換関係は

$$[q_{ik}, p_{jl}] = i\delta_{ij}\,\delta_{kl} \tag{12.14}$$

となり，ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\left(p_{ik}^2 + \omega_k^2\, q_{ik}^2\right) + H_{int} \tag{12.15}$$

と表せる．ただし，$\omega_k^2 = \boldsymbol{k}^2 + a$ である．相互作用項 H_{int} が摂動的に吸収されているとみなし，これを無視すると，ハミルトニアンは調和振動子と同じ形になり，その基底状態の波動関数は次のように直ちに書き下すことができる．

$$\Psi_0 = \langle q|0\rangle = \mathcal{N}\prod_{i,k}\exp\left(-\frac{1}{2}\omega_k q_{ik}^2\right) = \mathcal{N}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\omega_k q_{ik}^2\right). \tag{12.16}$$

ただし，$\mathcal{N}$ は規格化因子である．この場合，明らかに

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = \sum_k \langle 0|q_{ik}|0\rangle\, u_k(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{12.17}$$

となる．

自発的対称性の破れがある場合も同様に，半古典的な真空波動関数を構成することができる．$\langle 0|\phi|0\rangle = v\, e^{i\alpha}$ を得るために，

$$\phi = e^{i\alpha}\left[v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + i\eta_2)\right] \tag{12.18}$$

---

1 ［訳註］∂V は空間 V の境界を表す．

と表し，η_1, η_2 を $\langle 0|\eta_i|0\rangle = 0$ をみたす通常の量子場として扱おう．これを作用 (12.5) に代入すると，

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{2}\left[(\partial\eta_1)^2 + (\partial\eta_2)^2 - 2|a|\eta_1^2\right] - \sqrt{|a|b}\,\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2) - \frac{b}{4}(\eta_1^2+\eta_2^2)^2 \tag{12.19}$$

を得る．ただし，定数項 $|a|^2/4b$ を除いた．η の 1 次の項はゼロとなる．というのも，v は作用の古典的な最小値 $v^2 = |a|/2b$ に選ばれているからである．3 次以上の項を摂動的に扱うと，真空状態を η_1 と η_2 で構成することができる．η_1 は質量 $\sqrt{2|a|}$ をもつ質量場であり，η_2 は質量をもたず，南部–ゴールドストン・ボソンと呼ばれる．質量ゼロの場が現れることは，連続的対称性の自発的な破れに関するきわめて一般的な特性であり，ゴールドストンの定理として知られている．モード展開

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \sum_k \eta_{1k}u_k(\boldsymbol{x}),\\ \eta_2(x) &= \sum_k \eta_{2k}u_k(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{12.20}$$

を導入すると，基底状態の波動関数は

$$\Psi_0 = \mathcal{N}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k \Omega_k\eta_{1k}^2 - \frac{1}{2}\sum_k \omega_k\eta_{2k}^2\right) \tag{12.21}$$

と書ける．ここで，$\Omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+2|a|}$，$\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}$ である．この波動関数をもちいると

$$\langle 0|\phi|0\rangle = v\,e^{i\alpha} \tag{12.22}$$

となるのは明らかであろう．なぜなら，少なくとも相互作用を無視した近似では $\langle 0|\eta_1|0\rangle = 0$, $\langle 0|\eta_2|0\rangle = 0$ となるからである．（相互作用は南部–ゴールドストン・モードに関与するので，この結果が成り立たない場合もある．）南部–ゴールドストン・モードを分離するには ϕ を次のように表示するとよい．

$$\phi = \left(v + \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(i\frac{\lambda(x)}{v\sqrt{2}} + i\alpha\right). \tag{12.23}$$

ここで $\rho(x)$ と $\lambda(x)$ は力学的 (dynamical) な場である．上式を作用 (12.5) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int \frac{1}{2}\left[(\partial\rho)^2 + \left(1 + \frac{\rho}{v\sqrt{2}}\right)^2 (\partial\lambda)^2 - 2|a|\rho^2\right] \\
&\qquad\qquad\qquad - \sqrt{2}\, vb\,\rho^3 - \frac{b}{4}\,\rho^4 + (\text{定数}) \\
&= \int \frac{1}{2}\left[(\partial\rho)^2 + (\partial\lambda)^2 - 2|a|\rho^2\right] + \mathcal{O}(\rho^3) + (\text{定数})
\end{aligned} \tag{12.24}
$$

を得る．ρ は質量 $\sqrt{2|a|}$ をもつ場であり，λ は無質量の南部–ゴールドストン・ボソンである．ポテンシャル項は南部–ゴールドストン・モード λ によらないことに注意されたい．ここでも，3 次以上の項を摂動的に扱うことにより，真空状態を ρ と λ をもちいて，

$$
\Psi_0 = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k \Omega_k \rho_k^2 - \frac{1}{2}\sum_k \omega_k \lambda_k^2\right) \tag{12.25}
$$

と構成できる．ここで，場は次のようにモード展開される．

$$
\begin{aligned}
\rho(x) &= \sum_k \rho_k u_k(\boldsymbol{x}), \\
\lambda(x) &= \sum_k \lambda_k u_k(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{12.26}
$$

演算子 $\exp\left(i\lambda/v\sqrt{2}\right)$ の複合的な性質のため，期待値の計算はより複雑になる．そこで，繰り込まれた演算子

$$
\mathcal{O} = \exp\left(i\frac{\lambda}{v\sqrt{2}} + A\right) \tag{12.27}
$$

を導入しよう．ただし，A は紫外発散を相殺するような繰り込み定数である．期待値の計算は波動関数 (12.25) をもちいて行うことができる．これには $\langle\lambda(x)\lambda(x)\rangle$ が現れるので，$\lambda(x)$ は自由場であることをもちいると，これは同時刻の伝播関数から簡単に求めることができる．(以前は伝播関数に周期的境界条件を課していたが，ここでは境界上で場がゼロとなるとしているので，これらの導出には違いがある．ただし，いずれにしろカットオフによる任意性が存在するので，この違いは本質的ではない．つまり，定性的な結果は同じになる.）運動量カットオフ Λ を大きくとると，

$$
\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \exp\left(A - \frac{\Lambda^2}{16\pi^2 v^2}\right)
$$

$$= 1 \tag{12.28}$$

となる．ここで，繰り込み定数 A を $\Lambda^2/16\pi^2 v^2$ と選んだ．これより，ハミルトニアンの最小化から期待されるように $\langle 0|\phi|0\rangle = ve^{i\alpha}$ となる．ただし，ここでは ρ の相互作用を摂動的に扱った．

この計算は空間 1 次元の理論についても適用できる．この場合，$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle$ の計算に現れる k 積分は赤外発散も含み，

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \exp\left(A - \frac{1}{16\pi}\log(\Lambda/k_{min})\right) \tag{12.29}$$

となる．ここで，k_{min} は低運動量あるいは赤外カットオフである．空間 1 次元のとき v は無次元になり，これを 1 としても一般性を失わない．あるスケール μ を導入し $A = \frac{1}{16\pi}\log\Lambda/\mu$ と選ぶと，$\mathcal{O}$ は繰り込み可能となり，

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \left[\frac{k_{min}}{\mu}\right]^{16\pi} \to 0 \tag{12.30}$$

を得る．したがって，期待値 $\langle 0|\phi|0\rangle$ は赤外カットオフがゼロになる極限でゼロとなる．これは赤外効果であり，繰り込みの処方とはまったく関係ない．対称性が破れると南部–ゴールドストン場が現れる．この潜在的な南部–ゴールドストン場がもつ長距離スケール（つまり微小な k）での揺らぎによって，基底状態の（真空）期待値が不安定になる[2]．この問題はすべての無質量場について成り立つ．つまり一般に，空間 1 次元系では連続的対称性の自発的破れは起きない．この結果はマーミン–ワグナー–コールマン (Mermin–Wagner–Coleman) の定理として知られている．

基底状態の構成が半古典的であるとは，古典的な基底状態の配位 $ve^{i\alpha}$ を選んで，このまわりにピークをもつような波動関数を構成するという意味においてである．これは，高次の項があまり重要でなく $\hbar$ 展開が有効な理論ではよい出発点である．$\hbar$ 展開をもちいると，Ψ_0 と $\langle 0|\phi|0\rangle$ に補正を含めることができる．しかし，$\hbar$ 展開が適用できないときは，基底状態の波動関数を構

---

[2] ［訳註］$\mathcal{O}$ の期待値がゼロとなることは，南部–ゴールドストン粒子 λ の量子揺らぎが激しくなり，古典的に予想された対称性の自発的破れが量子的に壊されることを意味している．

成する一般的な規則は存在しない．ただ，その波動関数から間接的にさまざまな演算子の期待値を特徴づけることは可能である．

12.2　基底状態の直交性

前節で構成された基底状態の波動関数は $\langle 0|\phi|0\rangle = ve^{i\alpha}$ を与える．異なる α の値は異なる基底状態に対応するので，この節では期待値 $ve^{i\alpha}$ を与える基底状態を $|\alpha\rangle$ で表そう．古典的には，これらはすべて同じエネルギーをもつので，縮退した古典的基底状態であるといえる．それでは，量子的基底状態にもちいるべき位相 α の値は何であろうか？ 真の基底状態は特定の α の値に対応しているのか，あるいは異なる α をもつ $|\alpha\rangle$ の重ね合わせであるのか？状態 $|\alpha\rangle$ を使う際に，このような疑問が生じるのは自然であろう．その答えとしてここでは次の 2 つの結果を示そう．

1. $\langle\alpha|0\rangle = 0$ となる．より一般に $\alpha \neq \alpha'$ について $\langle\alpha|\alpha'\rangle = 0$ が成立する．
2. 物理的な結果は α の値に依存しない．

これらは，α を 1 つ選ぶことによって量子論を構成できることを示している．つまり，量子論を構成するには α を選択しなければならないが，その値は理論に影響しない．

2 番目の結果は簡単に理解できる．(12.23) のような場 ϕ をもちいると作用 (12.24) を得るが，これは明らかに α に依存しない．したがって，この作用から得られる結果はすべて α によらない．1 番目の結果については，α の変化が南部–ゴールドストン場 λ の変位と同じであることに注意すればよい．この変化を生成する演算子は $\partial_0\lambda$ である．よって，形式的に

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-iv\alpha\sqrt{2}\int d^3x\,\partial_0\lambda\right)|\,0\rangle \tag{12.31}$$

と表せる．この状態での $\exp(i\lambda/v\sqrt{2})$ の期待値は $e^{i\alpha}$ である．空間体積 $V = L^3$ にカットオフを導入して，$\partial_0\lambda$ の積分を

$$\int d^3x\ \partial_0\lambda = \left[\int d^3x\ e^{-x^2/L^2}\ \partial_0\lambda\right]_{L\to\infty} \tag{12.32}$$

と定義しよう．状態 $|0\rangle$ と $|\alpha\rangle$ の重ね合わせは

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|\exp\left(-iv\alpha\sqrt{2}\int \partial_0\lambda\right)|0\rangle$$
$$= \exp\left(-v^2\alpha^2\int \langle \partial_0\lambda(x)\partial_0\lambda(y)\rangle\right) \tag{12.33}$$

で与えられる．指数の期待値を評価すると，

$$\int \langle \partial_0\lambda(x)\partial_0\lambda(y)\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, d^3x\, d^3y\ \omega_k\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} e^{-x^2/L^2-y^2/L^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}L^2 \tag{12.34}$$

となるので，

$$\langle 0|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\alpha^2 v^2 L^2\right) \tag{12.35}$$

を得る．状態の重ね合わせは $\exp(-V^{\frac{2}{3}})$ のオーダーで消えることがわかる．これは一般の α, α'，さらには $\langle 0|\mathcal{O}|\alpha\rangle$ にも適用される．ここで，$\mathcal{O}$ は任意の**局所**演算子である．よって，基底状態は空間体積が無限大の極限で互いに直交し，またそれらは局所演算子に誘導されて遷移し合うことはない．(この結果は $V\to\infty$ のときにだけ成り立つことに注意しよう．これは自由度が無限になることに対応している．自由度が有限の系では，真の意味では自発的対称性の破れは起きない．実際上，巨視的な結晶などの大きな系は，無限自由度の系であると近似することができる.）また，すべての $\alpha \neq 0$ に対して $\langle 0|\alpha\rangle$ がゼロとなることは，量子論においてこの対称性がユニタリー性を持たないことを示している[3]．

以上をまとめると，$U(1)$ 理論 (12.5) は 2 つの相構造をもつ．$a>0$ の場合，$U(1)$ 対称性に明らかな相が存在し，対称性はウィグナー表示で表される．一方，$a<0$ のときは $U(1)$ 対称性は自発的に破れており，南部–ゴールドストン表示で表される．

[3] ［訳註］$|\alpha\rangle$ は真空 $|0\rangle$ にこの対称性の演算子をかけて作られるので，もしこの対称性がユニタリー性をもてば，$\langle 0|\alpha\rangle = 1$ となるはずである．

12.3　ゴールドストンの定理

まず $O(N)$ 対称性をもつ理論を例に，古典的なゴールドストンの定理を考えよう．作用は

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_a\partial^\mu\varphi_a - V(\varphi)\right] \tag{12.36}$$

で与えられる．$O(N)$ 変換は $\delta\varphi_a = \theta^A(T^A)_{ab}\varphi_b$ となる．ここで，$(T^A)_{ab}$ は対称性を表す群 $G = O(N)$ の生成子であり，$(N \times N)$ 反対称行列で与えられる．運動項は明らかにこの変換のもとで不変である．ポテンシャル項の不変性は

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_a}(T^A)_{ab}\varphi_b = 0 \tag{12.37}$$

を与える．これを再度微分すると

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}(T^A)_{ac}\varphi_c + \frac{\partial V}{\partial\varphi_a}(T^A)_{ab} = 0 \tag{12.38}$$

となる．これを $(\partial V/\partial\varphi_a) = 0$ の解となる真空期待値 $\varphi_a = v_a$ で評価しよう．このとき (12.38) は

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right)_{\varphi=v}(T^A)_{ac}v_c = 0 \tag{12.39}$$

となる．真空期待値のまわりで $\mathcal{S}$ を展開したときに現れる質量行列は

$$M_{ab} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right)_{\varphi=v} \tag{12.40}$$

である．よって，(12.39) は

$$M_{ab}\xi_a^A = 0 \tag{12.41}$$

と表せる．ただし，$\xi_a^A = (T^A)_{ac}v_c$ である．

生成子 T^A は2つのタイプに分けられる．v^c を消滅させる生成子は v_c の等方部分群 (isotropy subgroup) あるいは v_c の小群 (little group) を成し，$H \in G$ で表せる．H の生成子を t^α で表そう．また G の生成子のうち破れる対称性に対応するもの（つまり H 代数に含まれないもの）を S^i で表そう．H の生成子の場合，$\xi^A = 0$ となるので，(12.41) から質量についての情報を得る

ことはできない．破れる対称性に対応する生成子に関しては，一般に $\xi^A = \xi^i$ はゼロとならない．よって，これらは質量行列において固有値がゼロの固有状態であるとみなせる．ただし，質量行列のゼロ固有値は質量がゼロの粒子（無質量粒子）に対応する．以上より，すべての ξ^i が線形独立ならば，破れる生成子各々について無質量粒子が存在することが示された．これは古典的なゴールドストンの定理に相当する．この定理の完全な証明に必要な ξ^i の線形独立性は次のように理解することができる．もし ξ^i が線形従属であるならば，$\xi^i c_i = 0$ となるゼロでない解 c_i が存在する．これは $S_{ij} = \xi_{ia}\xi_{ja}$ を行列要素とみなしたとき，その行列の行列式がゼロとなることを意味する．S_{ij} は i, j について対称なので，直交変換 R_{ij} によって対角化することができる．（R_{ij} は $O(N)$ に属するのではなく，その部分群 $O[N(N-1)/2]$ に対応する生成子の方向についての直交変換である．）S_{ij} を対角化したものは $S_{ij} = \zeta_{ia}\zeta_{ja}$ となる．ただし，$\zeta_{ia} = R_{ji}\xi_{ja}$ である．対角成分は明らかに正の値をとる．もし ζ_{ia} がゼロなら，真空期待値 v_a に対して H より大きな等方部分群が存在してしまう．したがって，ξ^i は線形独立であり，ゴールドストンの定理が導かれる．

真空を不変にするような変換は部分群 $H \in G$ を成し，これは真空の**不変群** (invariance group) と呼ばれる．これは真空期待値の小群あるいは等方部分群でもある．(12.3) から $\langle 0|e^{iQ\cdot\theta}\,\phi_a\,e^{-iQ\cdot\theta}|0\rangle = \mathcal{D}_{ab}(\theta)\,\langle 0|\phi_b|0\rangle$ となるので，

$$e^{-iQ\cdot\theta}|0\rangle = |0\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}_{ab}(\theta)\,\langle 0|\phi_b|0\rangle = \langle 0|\phi_a|0\rangle \tag{12.42}$$

となる．真空の不変群 H は対称性を表す群 G の「破れない」部分群である．ここで対称性を表す群とは，理論の対称性をユニタリー性を保ちつつ実現する最大の群である．真空期待値に対応する場が複数あるとき，H はそれぞれの小群の最大の重なりで与えられる[4]．

つぎに，量子論におけるゴールドストンの定理について考えよう．まずラグランジアンが連続的な大域対称性をもつとすると，ネーターの定理から，保存カレント J^μ が存在する．つまり，

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{12.43}$$

4 ［訳註］H はすべての真空期待値を不変に保つ部分群である．

となる．つぎに，対称性のもとで非自明に変換する演算子つまり電荷 Q と交換しない演算子 $A(x)$ を考えよう．

$$[Q(t), A(0)] = B(0). \tag{12.44}$$

自発的対称性の破れがある場合に $\langle 0|B|0\rangle$ がゼロでないことをもちいて，定理の証明を行おう．保存則 (12.43) から

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x\, [\partial_\mu J^\mu(x), A(0)] \\ &= \oint dS_i [J^i(x), A(0)] + \frac{d}{dt}[Q(t), A(0)] \\ &= \frac{d}{dt}[Q(t), A(0)] \end{aligned} \tag{12.45}$$

がわかる．ここで，$\oint dS_i J^i$ は，周期的境界条件があるときまたは場が局在しているときに無限遠でゼロとなることをもちいた．これより，

$$\langle 0|B|0\rangle = \langle 0|\,[Q(t), A(0)]\,|0\rangle \tag{12.46}$$

は t に依存しない一定量であることがわかる．関係式

$$J^0(\boldsymbol{x}, t) = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} e^{iHt} J^0(0,0) e^{-iHt} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.47}$$

をもちい，また状態の完全系を挿入すると，(12.45) は

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(3)}(k_n) \Big[&\langle 0|J^0(0)|n\rangle \langle n|A(0)|0\rangle e^{-iE_n t} \\ &- \langle 0|A(0)|n\rangle \langle n|J^0(0)|0\rangle e^{iE_n t} \Big] = \langle 0|B|0\rangle \end{aligned} \tag{12.48}$$

と変形できる．ここで，E_n, k_n は状態 $|n\rangle$ のエネルギーと運動量である．(12.46) より，上式の右辺は時間に依存しない．また自発的対称性の破れを前提としているので，これはゼロでない．正負の振動数の寄与が互いに相殺しないので，上式は $E_G = 0$ となる状態 $|G\rangle$ が左辺に寄与するときにだけ成立する．$\delta^{(3)}(k_n)$ があるので，左辺には運動量がゼロの状態しか寄与しない．したがって，次の結果が得られる．

ラグランジアンの連続的大域対称性が自発的に破られると，その

対称性の各々について，運動量を $k \to 0$ とすると，エネルギーが $E \to 0$ となる状態が存在する（**ゴールドストンの定理**）.

エネルギーと運動量の間に相対論的な関係があるとき，この状態は無質量粒子に対応する．この定理は，固体物理学でよく現れる非相対論的な現象にも適用できる．この状態に対応する場の励起は南部–ゴールドストン・モードと呼ばれる．南部–ゴールドストン状態 $|G\rangle$ について，

$$\langle 0|A(0)|G\rangle \neq 0, \qquad \langle 0|J^0(0)|G\rangle \neq 0 \tag{12.49}$$

となることもわかる．したがって，カレント J^0 や演算子 A が南部–ゴールドストン状態を生成すると考えることができる．南部–ゴールドストン粒子に対応する場はローレンツ・スカラーである．これは，この粒子がカレントによって生成されることおよび内部対称性の変換を表すパラメータがスカラーであることからわかる．もしあるローレンツ・テンソルがゼロでない真空期待値をもつならば，ローレンツ不変性が破れてしまうことになる．したがって，相対論的な理論では B と A はローレンツ・スカラーである．A で生成される南部–ゴールドストン状態もスカラーであり，スピン 0 のボソンである．B と A は基本的なスカラー場である必要はない．つまり，これらは複合的な演算子でもよい．例えば，量子色力学のカイラル対称性の自発的破れにおいて，これらは $\bar{q}\gamma^5 q$ あるいは $\bar{q}q$ の形をもつ．ただし，q はクォーク場を表す．

12.4　コセット空間

コンパクトなリー群 G とその部分群 $H \subset G$ を考えよう．商つまりコセット G/H は，G のすべての要素 g のうち，ある要素 $h \in H$ をもちいて $g = g'h$ と表せる場合に，すべての g，$g' \in G$ について $g \sim g'$ と同定できるものによって定義される．言い換えれば，H の要素分だけの違いで変化する G の要素は同値であるとみなすことができ，これは G/H の 1 つの要素に対応する．リー群 G と同様に G/H も微分可能なリーマン多様体である．G の生成子 T^A によるリー代数は，H の生成子 t^α の部分代数とその直交成分の生成子 S^i に分解できる．G の無限小要素を $g \approx 1 - iT^A\theta^A = 1 - it^\alpha\theta^\alpha - iS^i\theta^i \approx (1 - iS^i\theta^i)(1 - it^\alpha\theta^\alpha) \approx (1 - iS^i\theta^i)h$ と表すと，S^i は単位元近傍のコセッ

ト方向を定義すること，また特に $dim\,(G/H) = dim\,G - dim\,H$ であることがわかる．

コセット空間のさまざまな応用には，コセット空間上の関数が必要となる．この関数は G 上の関数から導くことができる．そこで，リー群 G 上のすべての関数を考えよう．群の要素 g の行列表現を $\mathcal{D}^R_{mn}$ とする．ここで R は既約表現を表し，m, n は $1, 2, \ldots, dim\,R$ の値をとる行列要素の添え字である．関数 $\mathcal{D}^R_{mn}$ はウィグナーの $\mathcal{D}$ 関数と呼ばれる．角運動量代数の場合，これは $\mathcal{D}^j_{mn}(\theta) = \langle j, m|\exp(iJ^a\theta^a)|j, n\rangle$ で表され，$|j, m\rangle$ は標準的な角運動量状態，J^a は角運動量演算子である．群における標準的な完全性定理より，G がコンパクト・リー群のとき，関数 $\{\mathcal{D}^R_{mn}\}$ は完全系を成す．ただし，表現にはすべての既約ユニタリー表現が含まれる．(また，この表現の次元は有限である.) 言い換えれば，群の任意の関数は次のように展開することができる．

$$f(g) = \sum_{R,m,n} C^R_{mn}\,\mathcal{D}^R_{mn}(g). \tag{12.50}$$

コセット空間 G/H 上の関数は，その定義から，$g \to g\,h$ のもとで不変でなければならない．h は部分群 H の要素である．G/H 上の関数の基底は $\mathcal{D}$ の部分集合に拘束条件

$$\mathcal{D}^R_{mn}(gh) = \mathcal{D}^R_{mn}(g) \tag{12.51}$$

を課すことで得られる．これは，$\mathcal{D}^R_{mn}$ の右添え字 n が，$H \in G$ の1重項状態（シングレット）に対応していることを意味する．

リー群には，カルタン–キリング (Cartan–Killing) 計量として知られている自然なリーマン計量が存在する．g を群 G の一般的な要素とすると，$g^{-1}dg$ は $g^{-1}dg = -iT^A E^A_I(\varphi)d\varphi^I$ と展開される．ここで φ^I, $I = 1, 2, \ldots, dim\,G$ は群のパラメータである．E^A_I は空間 G のフレーム場と呼ばれる．これはまた $E^A = E^A_I d\varphi^I = 2i\,\mathrm{Tr}(T^A g^{-1}dg)$ と表すことができる．ただし，規格化 $\mathrm{Tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$ をもちいた．カルタン–キリング計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2\,\mathrm{Tr}(g^{-1}dg\,g^{-1}dg) \\ &= E^A E^A \\ &= E^A_I E^A_J\,d\varphi^I d\varphi^J \end{aligned} \tag{12.52}$$

で与えられる．（G のパラメータ表示は G の局所座標を選ぶことにすぎないことに注意しよう．一般に，大域的な座標系を 1 つだけ選び出すことはできない.）

コセット空間のフレーム場は $E^i = 2i\,\mathrm{Tr}(S^i g^{-1} dg)$ で定義できる．よって，コセットの計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= E^i E^i \\
&= G_{ij}(\varphi) d\varphi^i d\varphi^j \qquad (12.53)
\end{aligned}
$$

で与えられる．$h \in H$ をもちいると，$E^i(gh) = h^i_j E^j(g)$ となることがわかる．ただし，h^i_j は S^i が属する表現での H 変換の行列であり，$hS^i h^{-1} = h^i_j S^j$ となる．コセットの計量 ds^2 はこの変換のもとで不変である．つまり，$ds^2(gh) = ds^2(g)$ なので，$H \subset G$ に対応するパラメータによらない．(12.53) の φ で表された残りのパラメータは G/H の局所座標である．

つぎに，コセット空間のいくつかの例を与えよう．

1. $SU(2)/U(1)$.

空間 $SU(2)/U(1)$ は通常の 2 次元球面 S^2 である．$SU(2)$ の一般的な要素は $g = a + ib^i\sigma_i$ でパラメータ表示される．ここで，σ_i はパウリ行列である．ユニタリー性と行列式が 1 である条件から，$a^2 + b^i b^i = 1$（a, b^i は実数）となる．したがって，$SU(2)$ はトポロジカルには S^3 である．$U(1)$ 部分群を σ_3 方向をもちいた要素 $h = a + ib'\sigma_3$（ただし，$a^2 + b'^2 = 1$）で定義しよう．$b^i = b'\xi^i$ と書くと，残りのパラメータ ξ^i は $\xi^i\xi^i = 1$ をみたし S^2 であることに対応する．g のパラメータ表示には他に

$$
g = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\chi/2} \end{pmatrix} \qquad (12.54)
$$

がある．$g^{-1}dg$ を計算し，E^i を求めると，コセット計量は

$$
ds^2 = 4\frac{dz\, d\bar{z}}{(1+\bar{z}z)^2} \qquad (12.55)
$$

となる．これは 2 次元球面の標準的な計量である．θ, φ をもちいた通常のパラメータ表示は $z = \tan(\theta/2)e^{i\varphi}$ とすることで得られる．

2. その他のコセット空間.

他にも多くのコセット空間が存在する．簡単な例として，多次元球面 $SU(N)/SU(N-1) = S^{2N-1}$, $SO(N)/SO(N-1) = S^{N-1}$ がある．また，興味深い例として複素射影空間 $\mathbf{CP}^{n-1}$ があり，これは $SU(n)/U(n-1)$ で与えられる．これらの空間がなぜこのようなコセットで記述できるのか，ここでは議論しない．ただ，いくつかの場合については，この章の後半で明らかになるであろう．

12.5　非線形シグマ模型

リーマン多様体 $\mathcal{M}$ 上で値をとる場 $\varphi^A(x)$ を考えよう．すなわち，φ^A は $\mathcal{M}$ の座標である．$\varphi^A(x)$ は時空から $\mathcal{M}$ への写像を与える．

$$\varphi^A(x) \,:\, \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}.$$

写像先の空間 $\mathcal{M}$ は標的空間と呼ばれる．

$\mathcal{M}$ 上のリーマン計量テンソルを $G_{AB}(\varphi)$ とする．作用

$$\mathcal{S} = \int d^4x \; \frac{1}{2} G_{AB}(\varphi) \partial_\mu \varphi^A \partial^\mu \varphi^B \tag{12.56}$$

は $\mathcal{M}$ 上の非線形シグマ模型を定義する．シグマ模型の汎関数積分による構成法については 8 章で議論した．

ここでは，標的空間が群のコセットである場合に興味がある．このとき (12.53) の形の計量をもちいると，

$$\mathcal{S} = -2f^2 \int d^4x \; \mathrm{Tr}(S^i g^{-1} \partial_\mu g)\, \mathrm{Tr}(S^i g^{-1} \partial^\mu g) \tag{12.57}$$

と書ける．f は質量次元をもつ量であり，結合定数の役割を果たす．特に重要な場合は，G 自身つまり $H=1$ のときであり，作用は

$$\mathcal{S} = -f^2 \int d^4x \; \mathrm{Tr}\left(g^{-1} \partial_\mu g \, g^{-1} \partial^\mu g\right) \tag{12.58}$$

で与えられる．これは主カイラル模型 (principal chiral model) と呼ばれる．

12.6　南部–ゴールドストン粒子の動力学

南部–ゴールドストン粒子の動力学は標的空間が G/H の非線形シグマ模型で与えられる．これをまず，$O(N)$ 理論をもちいて示そう．前述のとおり，作用は

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial\varphi_a\partial\varphi_a - V(\varphi)\right] \tag{12.59}$$

となる．$O(N)$ 変換は $\varphi_a \to \varphi'_a = R_{ab}\varphi_b$ で与えられる．R_{ab} は $(N\times N)$ 回転行列の行列要素である．ポテンシャル $V(\varphi)$ はこの変換のもとで不変である．また，$V(\varphi)$ は $\varphi_a = \langle\phi_a\rangle$ で最小値をとるものとする．ただし，$\langle\phi_a\rangle\langle\phi_a\rangle \neq 0$ である．これは量子論での真空期待値となる．ここでは特に，

$$\langle\phi_a\rangle = v_a \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{12.60}$$

と選ぶ．ただし，v_a を列ベクトルの成分として表した．このベクトルはゼロである始めの $(N-1)$ 成分についての回転によらない．よって，このベクトルの小群は $O(N-1)$ である．したがって，真空期待値 (12.60) は対称性を $O(N)$ から $O(N-1)$ へ自発的に破る．$O(N-1)$ 変換は回転行列

$$h = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.61}$$

で与えられる．r は任意の $(N-1)\times(N-1)$ 回転行列である．よって，明らかに $h_{ab}v_b = v_a$ となる．

真空の値 $\langle\phi_a\rangle$ の他の成分つまり (12.60) でとった $\langle\phi_N\rangle$ 以外の成分をゼロでない値に選ぶこともできる．これは N 次元空間における $\langle\phi\rangle$ の向きを別方向に選ぶことに対応するが，これは (12.60) のベクトル全体に $O(N)$ 変換を施すことと同じである．ポテンシャルの最小値は $\langle\phi_a\rangle\langle\phi_a\rangle$ で固定されているので，(12.60) の $O(N)$ 回転によってこれらの解はすべて尽くされる．そのような解は，ある特定の行列 R_0 をもちいて $\langle\phi'\rangle = R_0\langle\phi\rangle$ と表せる．この

とき，小群の要素は $R_0 h R_0^{-1}$ の形をとる．ただし，h は (12.61) で与えられる．したがって，小群は $O(N-1)$ と同形 (isomorphic) であるがその特定の形は相似変換によって得られる．$U(1)$ の場合に強調したように，真空の値を求めるにはその向きを選ばなければならないが，物理量はその選び方に依存しない．

真空値のまわりの揺らぎを表す場 φ_a は

$$\varphi_a = R_{ab}(\varphi)\tilde{v}_b \tag{12.62}$$

とパラメータ表示できる．ただし，

$$\tilde{v}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v+\rho(x) \end{pmatrix} \tag{12.63}$$

である．R_{ab} は時空間に依存する回転行列である．つまり，これは場の成分 φ_a の関数とみなせる．$h_{ab}v_b = v_a$ が成り立つので（これは $O(N-1)$ 行列の r が時空間座標に依存する場合にも成り立つ），R_{ab} と $(Rh)_{ab}$ は (12.62) において同じ場を導く．よって，$O(N)/O(N-1)$ に対応する唯一のパラメータは φ_a のなかに現れる．x の値によらず，すべての R について $\varphi^2 = \varphi_a\varphi_a$ は同じである．よって，R に含まれる自由度は φ^2 が固定されたときの場の自由度に対応する．φ は N 個あるので，これは $(N-1)$ 次元の球面 S^{N-1} に対応した自由度であることを意味する．すなわち，$O(N)/O(N-1) = S^{N-1}$ である．

つぎに，パラメータ表示 (12.62) を作用に代入すると，

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\rho)^2 - V(v+\rho) - \frac{1}{2}\tilde{v}^T(R^{-1}\partial_\mu R\, R^{-1}\partial^\mu R)\tilde{v}\right] \tag{12.64}$$

を得る．ポテンシャル・エネルギー V は ρ にのみ依存し，一般にこれは場の質量項を与える．場 R を含む項は $(N-1)$ 個の南部–ゴールドストン粒子の運動項を与える．予想どおり，この粒子は無質量であることがわかる．R を含む項には $\tilde{v}$ があるので，南部–ゴールドストン粒子と ρ の相互作用項も存

在する．ρ 粒子の質量よりも低いエネルギーでは，南部–ゴールドストン粒子のみが励起され，その動力学を記述する作用は

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x\ v^T(R^{-1}\partial_\mu R\, R^{-1}\partial^\mu R)v \tag{12.65}$$

となる．$R^{-1}\partial_\mu R$ を $-iT^A E^A_B \partial_\mu \varphi^B$ と展開すると，$v^T T^A T^B v$ が現れる．小群 $O(N-1)$ のすべての生成子について $T^A v = 0$ となるので，この直交補成分の生成子のみが寄与する．これらは $(T^i)_{ab} = (S^i)_{ab} = \frac{i}{2}(\delta_{ia}\delta_{bN} - \delta_{ib}\delta_{aN})$ と書ける行列なので，$v^T S^i S^j v = \frac{1}{4}\delta^{ij}$ となる．作用 (12.65) は

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \frac{1}{2}f^2\int d^4x\ E^i_a E^i_b \partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^b \\ &= \frac{1}{2}f^2\int d^4x\ G_{ab}(\varphi)\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^b \end{aligned}\tag{12.66}$$

と書ける．ただし，$f = v/2$ である．したがって，南部–ゴールドストン・ボソンの動力学は標的空間が G/H の非線形シグマ模型で記述される．

作用 (12.65) は明らかに大域的な G 対称性をもつ．ここで，G 対称性は $R \to M\,R$（M は $O(N)$ 回転行列）で表される．これは予想されることである．というのも，対称性の破れは自発的にすぎない，すなわち真空状態の選択によって生じているにすぎないためである．無限小の変分 $R \to (1 - iT^A\theta^A(x))R$ をとると，作用の変分は

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x\ i\,v^T(R^{-1}T^A\partial_\mu R)v\ \partial^\mu\theta^A \tag{12.67}$$

となる．（ここで，T^A の反対称性をもちいた．）これより，パラメータ θ^A が定数のとき作用は大域的 G 対称性のもとで不変であることがわかる．さらに，この対称性に付随するカレントは

$$J^A_\mu = i\,v^T(R^{-1}T^A\partial_\mu R)v \tag{12.68}$$

となる．また，R についての場の運動方程式はこのカレントの保存則であることがわかる．

これまでの議論は古典論に限られてきた．量子論では，散乱過程における外部粒子の低エネルギー状態であっても，質量粒子の寄与を無視できない．というのも，それらはループ・ダイヤグラムの内線として現れるからである．

さらに，(12.66) の作用は一般に非線形な項を多数含むため，この作用には南部–ゴールドストン・ボソンの自己相互作用項が現れる．したがって，南部–ゴールドストン・ボソンによるループへの寄与も存在する．ループ・ダイヤグラムによる量子作用への補正にはさまざまなタイプがある．まず，場 ρ の項への補正が多数ある．ρ によらない低エネルギー散乱過程の有効作用 Γ では，これらの補正は重要ではない．つぎに，ループ補正を取り入れることは，作用（特にポテンシャル V とそれに依存する真空の値）のパラメータを繰り込まれたパラメータで置き換えることを意味する．上の変形から，この効果は f をある繰り込まれた値に置き換えることに対応している．最後に，南部–ゴールドストン場の高次の微分を含む項も多数現れる．2次の微分項まで考えると，例えば，$(v^T R^{-1}\partial_\mu R R^{-1}\partial^\mu R v)^2$, $(v^T[R^{-1}\partial_\mu R, R^{-1}\partial_\nu R]v)^2$ などの項がある．これらは実際に存在し，Γ に含まなければならないが，低エネルギー散乱過程におけるこれらの寄与は2次の主要項に比べて小さい．なぜなら，微分は散乱粒子の運動量となるからである．したがって，低エネルギーではこれらの項も無視できる．(f は作用のスカラー・パラメータなので，ここでは $k/f \ll 1$ を考えている．ただし，k は散乱の一般的な運動量を表す.) 以上をまとめると，連続的対称性 G が H へと自発的に破れる際の南部–ゴールドストン・ボソンの低エネルギー有効作用は G/H シグマ模型で与えられる．パラメータ f は，原理的には，近似のないもともとの理論から導出できるが，実験値からこのパラメータを決めることにより，南部–ゴールドストン・ボソンの動力学をシグマ模型をもちいて議論することができる．

ここでは，スカラー場のラグランジアンを考えたが，南部–ゴールドストン・ボソンの動力学についての結果はきわめて一般的である．したがって，例えば $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$ という真空期待値をもつ複合演算子をもちいて，対称性の破れを伴うフェルミオン理論を構成することができる．このとき，南部–ゴールドストン・ボソンはフェルミオンの束縛状態となるが，それでもこの南部–ゴールドストン粒子の低エネルギー有効作用は G/H シグマ模型で与えられる．これは，南部–ゴールドストン粒子がカレントつまり $\langle 0|J^0(0)|G\rangle \neq 0$ で生成されることによる．このことと矛盾せず，さらにローレンツ不変性およびカレントの保存則をみたす $\langle 0|J_\mu(x)|G\rangle$ の唯一の形は，

$$\langle 0|J^i_\mu(x)|G,k\rangle = (\text{定数}) \times k_\mu \tag{12.69}$$

で与えられる.（$k^2 = 0$ なので，これは保存則をみたす.）上式は，対称性の破れる生成子に対応するカレントの成分の真空での値から φ が生成されることを示す．これは φ が束縛状態であるかないかにはよらない．したがって，カレントそれ自体は次の関係式を満たさなければならない．

$$J^i_\mu = f^2\partial_\mu\varphi^i + \mathcal{O}(\varphi^2). \tag{12.70}$$

ここで，f は定数であり，φ は南部–ゴールドストン場を表す．この形のカレントを与える作用は

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}f^2\int d^4x\ \partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^i + \mathcal{O}(\varphi^3) \tag{12.71}$$

である．破られる対称性の変換は微小な θ^i をもちいて $\varphi^i \to \varphi^i + \theta^i$ と表せる．ここでは，対称性の自発的な破れつまり真空状態のみにおける対称性の破れを考えているので，上の作用は G 対称性を保存する．よって，φ の高次の項は G 不変性により固定され，これより直ちにシグマ模型が導かれる．すなわち，南部–ゴールドストン・ボソンの低エネルギー動力学についての前述の結果はきわめて一般的である．

最後に，R を $R = \exp(-iT^A\varphi^A) = 1 - iT^A\varphi^A + \mathcal{O}(\varphi^2)$ とパラメータ表示すると，シグマ模型のカレント (12.68) が次のように変形されることに注意しよう．

$$J^i_\mu = f^2\partial_\mu\varphi^i + \mathcal{O}(\varphi^2). \tag{12.72}$$

これは対称性の破れる生成子に対応したカレントである．この結果は一般公式 (12.70) と同じである．$O(N-1)$ 方向については，場の 1 次の項は現れない．これは，対称性が破れない生成子 t^α が真空期待値 v に作用するとゼロとなるためである．この方向に対応するカレントは

$$J^\alpha_\mu = f^2 f^{\alpha ij}\,\varphi^i\partial_\mu\varphi^j + \mathcal{O}(\varphi^3) \tag{12.73}$$

の形をとる．ただし，構造定数 $f^{\alpha ij}$ は $[t^\alpha, S^i] = if^{\alpha ij}S^j$ で定義される．

12.7 自発的対称性の破れに関する結果のまとめ

1. G はラグランジアンの対称性を表す群である．これはまた，ハミルトニアンの対称性も与える．
2. $G|0\rangle \neq |0\rangle$, $H|0\rangle = |0\rangle$ であるとき，これは，G から $H \subset G$ への自発的な対称性の破れを意味する．
3. これは，エネルギー準位を最小化したときに，G のもとで非自明に変換する演算子 A の真空期待値が $\langle 0|A|0\rangle \neq 0$ となるときに実現される．このとき，真空期待値を不変にする等方部分群は H で与えられる．
4. 真空の縮退状態の間での遷移は，自由度が無限の極限 $\langle \alpha|\alpha'\rangle \to 0$ では起こらない．
5. ラグランジアンの連続的大域対称性が自発的に破れるとき，その破れに対応する生成子の 1 つ 1 つに対して質量のないスピン 0 粒子（南部–ゴールドストン・ボソン）が現れる．
6. 南部–ゴールドストン・ボソンの低エネルギー動力学は，その相互作用項も含めて，標的空間が G/H となる非線形シグマ模型で与えられる．
7. このとき，破れた対称性に対応するカレントは $J^i_\mu = f^2\partial_\mu\varphi^i + \mathcal{O}(\varphi^2)$ の形で表される．ただし，φ^i は南部–ゴールドストン場，f は定数である．

12.8 スピン波

連続的な対称性の自発的破れの簡単な例として強磁性体がある．これは 3 次元格子の各格子点がスピン変数をもつスピン系である．他の自由度を無視すると，この系のハミルトニアンは次のハイゼンベルク模型でよく近似される．

$$H = -\sum_{ij} J_{ij}\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j. \tag{12.74}$$

ここで，i, j は格子点の添え字，$\boldsymbol{S}_i$ は格子点 i でのスピン・ベクトルである．J_{ij} は交換積分と呼ばれる量で，これは格子間距離が大きいときに減衰する．よって，(12.74) において最隣接の相互作用だけをとることで多くの場合よい近似となる．(ここでは慣習にならいハミルトニアンと破れない部分群をとも

に H で表したが，文脈からどちらを意味するかは明らかであろう.）ハミルトニアン (12.74) は回転対称性をもつので，これは $O(3)$ 対称性をもつ理論である．基底状態は，$J_{i\,i+1}$ が正のときには，隣接するスピンがそろって全体で正味の磁化をもつ強磁性体であり，$J_{i\,i+1}$ が負のときには隣接スピンが反対方向を向く反強磁性体となる．どちらの場合も，基底状態は $O(3)$ 対称性を破る．強磁性体の場合，スピンは同方向に並ぶので基底状態は正味の磁化をもつ．磁化方向のスピン軸回転についての対称性は破れず残るので，$O(3)$ 対称性は $O(2)$ に破れる．格子空間が無限に大きく，長波長の励起を考えるならば，この理論は連続場の理論で近似できる．$O(3) \to O(2)$ の対称性の破れは 2 つの南部–ゴールドストン・モードを与える．このモードがスピン波である．$O(3)/O(2)$ は S^2 なので，このモードの動力学は S^2 が標的空間のシグマ模型で与えられる．ここではローレンツ不変性がないので，相対論的な有効ラグランジアンを書くことは意味をなさない．しかし，有効ハミルトニアンがシグマ模型の形で書けることは言える[5]．つまり，

$$H = \frac{f^2}{2} \int d^3x \left[4 \frac{\nabla Z \, \nabla \bar{Z}}{(1 + \bar{Z}Z)^2} \right] \tag{12.75}$$

と書ける．ここで，場 Z はスピン波を表す．場 $Z, \bar{Z}$ で級数展開すると，このハミルトニアンはスピン波の相互作用を与えることがわかる．

12.9　QCD におけるカイラル対称性の破れ

量子色力学 (QCD) は強い相互作用の理論，つまりクォークとグルーオンの理論である．これは $SU(3)$ ゲージ理論であり，グルーオンはゲージ粒子，物質場は $SU(3)$ の基本表現で変換するクォークで表される．この $SU(3)$ 対称性に関する自由度はカラー自由度と呼ばれる．クォーク場はそれぞれカラーの添え字をもち，$1, 2, 3$ の値をとる．これらの成分は $SU(3)$ ゲージ変換のもとで互いに変換する．クォークには 6 つの種類が知られている．それらは u,

---

[5] ［訳註］2 次元球面 S^2 を平面に射影すると $\mathbf{CP}^1$ 空間になる．2 次元球面上のシグマ模型は場が球面に拘束されているという条件付きの非線形シグマ模型で表され，$O(3)$ 対称性を自明にみたす．一方，このハミルトニアンの Z は $\mathbf{CP}^1$ 上の複素座標を表し，拘束条件がない代わりに，$O(3)$ 対称な $\mathbf{CP}^1$ 空間の計量からくる項が分母についている．

d, s, c, b, t で表され，それぞれアップ，ダウン，ストレンジ，チャーム，ボトム，トップと呼ばれる．ここではこれらを Q^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, 6)$ で表そう．i はカラーの添え字で $1, 2, 3$ の値をとる．アップ・ダウンのクォークは数 MeV のオーダーの質量をもち，ストレンジ・クォークはおよそ 150 MeV の質量をもつ．これらは軽いクォークである．一方，チャーム，ボトム，トップの質量はそれぞれ約 1.2 GeV, 4.2 GeV, 174 GeV である．これらは重いクォークに分類される．クォークは電弱相互作用のゲージ対称性の自発的破れによって質量を得る．このときのエネルギー・スケールはおよそ 246 GeV である．したがって，このスケールよりも十分低いエネルギーではクォーク質量の与えられたラグランジアンをもちいることができる[6]．よって，QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \sum_\alpha \bar{Q}^i_\alpha (i\gamma \cdot D_{ij} - m_\alpha \delta_{ij}) Q^j_\alpha \tag{12.76}$$

と書ける．ここで共変微分は

$$\begin{aligned}(D_\mu)_{ij} &= (\partial_\mu + A_\mu)_{ij} \\ &= \partial_\mu \delta_{ij} - ie_s A^A_\mu (T^A)_{ij}\end{aligned} \tag{12.77}$$

で与えられる．A^A_μ $(A = 1, 2, \ldots, 8)$ は $SU(3)$ ゲージ対称性のゲージポテンシャルである．T^A はトレースがゼロの (3×3) エルミート行列であり，これらは $SU(3)$ の基本表現に属す生成子である．また，e_s は強い相互作用の結合定数である．

質量項のないクォークのラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sum_\alpha \bar{Q}^i_\alpha \, i\gamma \cdot D_{ij} \, Q^j_\alpha \\ &= \sum_\alpha \bar{Q}^i_{L\alpha} \, i\gamma \cdot D_{ij} \, Q^j_{L\alpha} + \sum_\alpha \bar{Q}^i_{R\alpha} \, i\gamma \cdot D_{ij} \, Q^j_{R\alpha}\end{aligned} \tag{12.78}$$

を考えよう．ただし，2 行目でクォーク場を左右のカイラル成分，$Q_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)Q$ と $Q_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)Q$ に分解した．このラグランジアンは大域的な

---

[6] ［訳註］これより高いエネルギー・スケールでは電弱相互作用を記述する標準模型を考えて，クォーク質量がヒッグス場の真空期待値で与えられると考えなければならない．

$U_L(6) \times U_R(6)$ 対称性をもち，この対称性は

$$\begin{aligned} Q^i_{L\alpha} &\to Q'^i_{L\alpha} = U_{\alpha\beta} Q^i_{L\beta}, \\ Q^i_{R\alpha} &\to Q'^i_{R\alpha} = V_{\alpha\beta} Q^i_{R\beta} \end{aligned} \tag{12.79}$$

で与えられる．U, V は (6×6) ユニタリー行列である．これは強い相互作用のカイラル対称性である．質量項はこの対称性をもたない．よって，これはあまり有用ではないようにみえるが，軽いクォークの場合，このカイラル対称性は非常に有用な近似を与える．というのも，質量によるあからさま（明示的）なカイラル対称性の破れは，グルーオンの相互作用のスケールに比べて小さいからである．そこで，α, β の値をアップ，ダウン，ストレンジ・クォークに対応する $1, 2, 3$ に限定することによって，3 種類（あるいは 3 フレーバー）のクォークの QCD 理論を考えよう．添え字 α, β をこのように理解すると，ラグランジアンのクォーク項は

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_L i\gamma \cdot DQ_L + \bar{Q}_R i\gamma \cdot DQ_R - \left(\bar{Q}_L \mathcal{M}^q Q_R + \bar{Q}_R \mathcal{M}^q Q_L\right) \tag{12.80}$$

となる．$\mathcal{M}^q$ はクォークの質量行列

$$\mathcal{M}^q = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \tag{12.81}$$

である．

このラグランジアンの対称性は次のとおりである．

1. カラー・ゲージ対称性．これは変換

$$\begin{aligned} Q^i_\alpha &\to Q'^i_\alpha = g^i_j(x)\, Q^j_\alpha, \\ A_\mu &\to A'_\mu = g(x)\, A_\mu\, g^{-1}(x) - \partial_\mu g\, g^{-1} \end{aligned} \tag{12.82}$$

に対応する．ここで $g(x)$ は $SU(3)$ 行列である．この対称性は破れないが，クォークとグルーオンの閉じ込めを導く．理論のスペクトルはクォークとグルーオンの束縛状態だけで与えられ，この対称性の 1 重項状態に対応する．

2. パリティ，荷電共役，時間反転などの離散的な対称性．ゲージ場の配位空

間のトポロジーに関係した量子効果やインスタントンによって，θ 項と呼ばれる PT を破りうる項が現れる．これについては 16 章で議論する．実験によると，$\theta < 10^{-9}$ となる．この値が微小であることの理論的な理由は現在のところ明らかではないものの，この効果による PT の破れは実験的にはゼロとみなせることが知られている．

3. (12.79) と同様の $U(3)_L \times U(3)_R$ カイラル対称性．無限小生成子の代数レベルで考えると $U(N) \sim SU(N) \times U(1)$ となるので，$U(1)$ を分離して議論しよう．このとき $SU_L(3) \times SU_R(3)$ 対称性を表す群の $SU_V(3)$ 部分群は変換

$$\begin{aligned} Q'_{L\alpha} &= U_{\alpha\beta} Q_{L\beta}, \\ Q'_{R\alpha} &= U_{\alpha\beta} Q_{R\beta} \end{aligned} \tag{12.83}$$

で定義される．すなわち，$SU_V(3)$ は (12.79) の $U = V$ 部分集合に対応する．

4. $U(1)$ 変換は

$$\begin{aligned} U(1)_L: \quad & Q'_L = e^{i\theta} Q_L, \qquad Q'_R = Q_R, \\ U(1)_R: \quad & Q'_L = Q_L, \qquad Q'_R = e^{i\alpha} Q_R \end{aligned} \tag{12.84}$$

で与えられる．これらを組み合わせて，$U_V(1), U_A(1)$ を

$$\begin{aligned} U_V(1): \quad & Q'_L = e^{i\varphi/3} Q_L, \qquad Q'_R = e^{i\varphi/3} Q_R, \\ U_A(1): \quad & Q'_L = e^{i\lambda} Q_L, \qquad Q'_R = e^{-i\lambda} Q_R \end{aligned} \tag{12.85}$$

と定義することができる．$U_V(1)$ はパリティについて偶であり，その保存カレントはベクトル量である．これはバリオン数とみなせる．$U_A(1)$ はパリティについて奇であり，そのカレントは軸性 (axial) ベクトルである．

カイラル対称性は次のようにさまざまな形で破れる．

1. グルーオン相互作用（ゲージ場 A^a_μ）の効果によって，$U(3)_L \times U(3)_R$ カイラル対称性は $U(3)_V \sim SU_V(3) \times U_V(1)$ へと自発的に破れる．この破れが起こるエネルギー・スケールはおよそ 140 MeV である．この対称性の破れによって現れる南部–ゴールドストン・ボソンの有効ラグ

ランジアンは，散乱振幅の計算に付随する数値的な因子のため，およそ 1 GeV まで有効である．また，ヴァッファ(Vafa) とウィッテン (Witten) による定理から，ゲージ粒子とフェルミ粒子がベクトル的に結合する理論において，ベクトル的な対称性は自発的に破れることはない．したがって，$SU_V(3) \times U_V(1)$ はカイラル対称性が自発的に破れることのできる最小の群である．

2. 質量項はカイラル対称性を明示的に破る．もし $\mathcal{M}_q = m_0 \mathbf{1}$，つまりすべてのクォークが同じ質量をもつならば，$SU_V(3) \times U_V(1)$ は破れることのない部分群である．クォーク質量が異なる場合，$SU_V(3)$ はさらに破れる．質量によるこの破れはあからさまであり，究極的には電弱相互作用に起因する．というのも，クォークの質量はクォークと電弱ヒッグス場の相互作用によって生成されるからである．
3. 電弱相互作用による明示的な対称性の破れは，電弱ゲージボソンとクォークの結合によっても起きる．例えば，$\pi^{\pm}$ メソンと π^0 メソンの質量差はこの効果の一例である．
4. 軸性 $U_A(1)$ 対称性は，量子補正に由来するアノマリー（量子異常）によって，巡回群 Z_6（N_f 個の種あるいはフレーバーの軽いクォークがある場合は Z_{2N_f}）に破れる．

バリオン数の対称性 $U_V(1)$ は強い相互作用によって自発的あるいは明示的に破れることはない．実は，この対称性は電弱理論の量子異常によって破られており，$B - L$（つまり，バリオン数からレプトン数を引いたもの）が素粒子相互作用の標準模型で得られる唯一の大域的対称性である．

これらの破れがもつ階層性もまた重要である．最も強い破れは，カイラル対称性の自発的破れと $U_A(1)$ のアノマリーによる破れである．これらのエネルギー・スケールは 1 GeV のオーダーである．つぎに，質量項によるカイラル対称性の明示的な破れが起こり，質量差による $SU_V(3)$ の破れが続く．電弱相互作用による破れがその次にきて，最も弱い破れは電弱アノマリーによるバリオン数 $U_V(1)$ の破れである．

最初の破れ $SU_L(3) \times SU_R(3) \to SU_V(3)$ で破られる対称性の生成子は軸性をもち，擬スカラーである 8 個の南部–ゴールドストン・ボソンを導く．こ

れらは，$\pi^{\pm}$, π^0, $K^{\pm}$, K^0, $\bar{K}^0$ そして η 中間子（メソン）に対応する．質量による明示的なカイラル対称性の破れのため，この対称性は完全ではない．その結果，これらのメソンは真の南部–ゴールドストン・ボソンではない．実際に，これらのボソンは質量をもち，擬南部–ゴールドストン・ボソンと呼ばれる．電弱相互作用の結合定数とクォーク質量がゼロとなる極限では，これらの質量はゼロになる．明示的な破れのエネルギー・スケールは自発的な破れのスケールに比べて小さいので，これらを南部–ゴールドストン・ボソンと考えることは有用であり，質量を有効作用に加えることができる．実際，これらの質量は自発的な破れのスケールである約 1 GeV と比べて著しく小さいので，この議論は妥当である．$SU_V(3)$ も完全な対称性ではないので，南部–ゴールドストン・ボソンの間にも質量差が生じる．

質量差により破れている $SU_V(3)$ は，理論の近似的な対称性を与え，ウィグナー表示で表される．よって，状態（メソンとバリオン）はこの $SU_V(3)$ で分類できる．対称性の破れが階層性をもつことは，この解析になぜ重いクォークを含めることが有用でないのかをも明らかにする．つまり，重いクォークの質量は自発的破れのスケール 1 GeV よりも大きいので，カイラル対称性のあからさまな破れが大きすぎて，たとえ 1 次近似でもこれらについてのカイラル対称性を考えることは有用でないことがわかる．

12.10 QCD カイラル対称性の破れの有効作用

つぎに，擬スカラー・メソンとバリオンについての有効作用を構成しよう．メソンの動力学は標的空間が G/H （ただし，$G = SU_L(3) \times SU_R(3)$, $H = SU_V(3)$ である）の非線形シグマ模型で記述されなければならない．$SU_L(3) \times SU_R(3)$ の要素を $G = (G_L, G_R)$ とし，変換 (12.83) に対応するベクトル部分群を $h = (g, g)$ とする．ここで，G_L, G_R, g は (3×3) 行列で表される $SU(3)$ の要素である．g は任意なので，行列式が 1 のユニタリー行列 V をもちいて $g = G_R^\dagger V$ と書ける．このとき，V を $h = (G_R^\dagger V,\ G_R^\dagger V)$ の変数とみなして，すべての $V \in SU(3)$ を考えると，$SU_V(3)$ を得る．コセット上では要素 G と Gh を同一視できるので

$$G\,h = (G_L G_R^\dagger V,\, V) = (G_L G_R^\dagger, 1)(V, V) \tag{12.86}$$

となる．これはコセットが $SU(3)$ 行列 $U = G_L G_R^\dagger$ で表されることを示す．すなわち，

$$\frac{SU_L(3) \times SU_R(3)}{SU_V(3)} \sim SU(3) \tag{12.87}$$

となる．南部–ゴールドストン粒子（この場合はメソン）は $SU(3)$ の要素 U で表される．カイラル対称性 $SU_L(3) \times SU_R(3)$ の群の要素 (g_L, g_R) は G_L, G_R に作用し，新しい要素 $(g_L G_L, g_R G_R)$ に変換する．したがって，これらの U への作用は

$$U \to U' = g_L\, U\, g_R^\dagger \tag{12.88}$$

と書ける．真空を $U = 1$ に選ぶ（つまり $\langle 0|U|0\rangle = 1$ とする）と，等方部分群は $g_L = g_R$ となり，これは変換のベクトル部分群に相当する．(真空での U を任意の定行列に選ぶこともできる．この場合，G のベクトル部分群の向きが $\langle 0|U|0\rangle = 1$ に比べて少し変わるだけである.）これまでの一般論から，擬スカラー中間子の有効作用は

$$\mathcal{S} = \frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x\ \mathrm{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) \tag{12.89}$$

で与えられる．ここで，U は

$$U = \left(1 + i\frac{M}{\sqrt{2}\, f_\pi}\right)\left(1 - i\frac{M}{\sqrt{2}\, f_\pi}\right)^{-1} \tag{12.90}$$

とパラメータ表示できる．ただし，M はトレースがゼロのエルミート行列である．このとき有効作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int d^4x\ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\left(1 + \frac{M^2}{2f_\pi^2}\right)^{-1} \partial_\mu M \left(1 + \frac{M^2}{2f_\pi^2}\right)^{-1} \partial^\mu M\right] \\
&= \int d^4x\ \left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\partial_\mu M \partial^\mu M) - \frac{1}{2f_\pi^2}\mathrm{Tr}(M^2 \partial_\mu M \partial^\mu M) + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{12.91}$$

となる．物理的なメソン場の同定は $M = t^a \phi^a/\sqrt{2}$ で与えられる．ここで，ϕ^a はメソン場，t^a は $SU(3)$ 代数の基底である．ただし，t^a はトレースがゼロのエルミート行列であり，$\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化されている．行列を書き下すと，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix} \tag{12.92}$$

となる．ただし，メソン場を対応する粒子の名前をもちいて表した．(上式で η は実際の物理的な η メソンではない．これは $SU(3)$ の 1 重項状態である擬スカラー・メソンとの混合によるのであるが，その詳細についてはここでは議論しない.）ここで現れる 8 つの場は $SU_V(3)$ のオクテット（8 重項）表現を成す．

(12.91) の 4 次の項はメソンの散乱を記述する．メソンはまたバリオンとも相互作用する．この相互作用は次のように理解できる．バリオンは 3 つのクォークでできているので，メソン同様 $SU_V(3)$ の表現に従って変換する．$SU_V(3)$ の添え字をもちいると，バリオンは $Q^i_\alpha Q^j_\beta Q^k_\gamma \epsilon_{ijk}$ と表される．これはカラーの添え字について反対称である．したがって，フレーバーの添え字 α, β, γ について完全対称な表現をとることができる．また，排他律からこの表現はスピンについても対称性をもつ．これはスピン $\frac{3}{2}$ バリオンのデカプレット（10 重項状態）を与える．別の可能性として，フレーバー添え字のペアおよび対応するスピンのペアを反対称にとると，スピン $\frac{1}{2}$ バリオンのオクテット（8 重項状態）が得られる．最小質量のバリオンはオクテットであり，それらは $B_{\alpha\beta\gamma} = Q^i_{\alpha n}(Q^j_{\beta r}Q^k_{\gamma s} - Q^j_{\gamma r}Q^k_{\beta s})\epsilon_{ijk}$ と表される．ここで，n, r, s はスピンの添え字である．ただし，反対称化によりスピンは $\frac{1}{2}$ となる．対応する粒子は $B^\lambda_\alpha = \frac{1}{2}B_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\lambda\beta\gamma}$ をもちいて，

$$B^\lambda_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix} \tag{12.93}$$

と表せる．同様に，反バリオンについても構成できる．また，バリオンの運動エネルギー項は $\bar{B}^\alpha_\lambda i\gamma \cdot \partial B^\lambda_\alpha$ となる．

メソン・バリオンの相互作用とバリオンの質量項に関して言えば，これらは次のことから決まる．つまり，ラグランジアンが完全なカイラル対称性を持つことと，この対称性が自発的にしか破れないため，対称性の破れは U を真空値 1 のまわりで展開する場合にのみ現れるという事実である．カイラリティ

が左のスピノールは2成分のスピノール χ_r $(r=1,2)$ で与えられ，ローレンツ変換の (2×2) 行列表現によって変換する．この行列は単位行列式をもつので，スピノールの添え字と ϵ^{rs} の縮約をとって不変量を得ることができる．したがって，カイラリティが左のバリオンは $Q_LQ_LQ_L$（2つの Q_L はローレンツ不変な組み合わせを成す）あるいは $Q_LQ_RQ_R$（2つの Q_R は不変量を成す）の形で表せる．相互作用項がどのように構成されるかを示すために，例えば $Q_LQ_LQ_L$ の形を考えよう．このとき，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}g_{\alpha\alpha'}g_{\beta\beta'}=\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}g^\dagger_{\gamma'\gamma}$ となるので，バリオン行列についての変換則は

$$B_L\to g_LBg_L^\dagger,\quad B_R\to g_RBg_R^\dagger \tag{12.94}$$

となる．バリオンの質量項 $\mathrm{Tr}(\bar{B}_LB_R+\bar{B}_RB_L)$ がカイラル不変でないことは簡単に確認できる．U の変換則をもちいると，不変な項を構成することができ，次のバリオン有効作用が導かれる．

$$\mathcal{S}_B=\int d^4x\left[\mathrm{Tr}(\bar{B}\,i\gamma\cdot\partial\,B)+gf_\pi\,\mathrm{Tr}\left(\bar{B}_LUB_RU^\dagger+\bar{B}_RU^\dagger B_LU\right)\right]. \tag{12.95}$$

ここで，g は定数である．上式をバリオン場で書き U の展開式をもちいると，バリオン質量は $m_B=gf_\pi$ となり，π 中間子と核子の結合定数は $g_{\pi\bar{N}N}=g$ となることがわかる．π 中間子と核子の相互作用は $ig\bar{N}\gamma^5\tau^aN\pi^a$ で与えられ，これはもともと湯川相互作用として導かれたものと同じ形をもつ．ただ，ここでは π 中間子の擬スカラー性を考慮しているため，少し修正された形で表されている．$m_B=g_{\pi\bar{N}N}f_\pi$ の関係はゴールドバーガー–トライマン (Goldberger–Treiman) の関係式として知られている.（この関係式は最低次の結果であり，高次オーダーでは軸性カレントの形状因子による補正が寄与する.）

ここまで，カイラル対称性の明示的な破れについては議論してこなかった．この点について，最も重要な結果はメソンの質量項である．これは次の形で表せる．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{mass}&=\frac{f_\pi^2}{4}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\mathcal{M}\left(U+U^\dagger-2\right)\\&\approx\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{M}M^2)+\frac{1}{4f_\pi^2}\mathrm{Tr}(\mathcal{M}M^4)+\cdots\right].\end{aligned} \tag{12.96}$$

行列 $\mathcal{M}$ はクォークの質量行列と同様な構造をもち，クォーク質量と質量差による対称性の破れのパターンが組み込まれる．この行列は次の形にとれる．

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{12.97}$$

アップとボトムの質量は近似的に同じなので，$a \approx a'$ である．また $b > a, a'$ となる．未知の係数 a, a', b はメソン質量の実験値と関係している．実際，(12.96) を展開し，質量を a, a', b をもちいて同定すると，ゲルマン–大久保の質量公式の 1 つ

$$3m_\eta^2 \approx 4m_K^2 - m_\pi^2 \tag{12.98}$$

が得られる．これは実験値とよく一致している．前述のとおり対称性の破れには他の原因があり，それらのいくつかは有効作用にうまく組み込むことができるが，それらについてここでは議論しない．

有効作用の応用のもう 1 つの例として，低エネルギーの π–π 散乱を考えよう．この計算では，(12.92) のすべての K, η 項を無視することができる．また，$M = \tau \cdot \pi/\sqrt{2}$ と書ける．ここで，τ^i はパウリ行列，さらに $\pi^\pm = (\pi^1 \pm i\pi^2)/\sqrt{2}$, $\pi^3 = \pi^0$ である．これらの場に作用する部分群 $SU(2)_V$ があるのは明らかである．これはアイソスピン対称性と呼ばれる．τ をパウリ行列としたのは，これらがフレーバー・アイソスピン対称性に作用するためである．π–π 散乱に関与する有効作用 (12.91) の項は

$$\mathcal{S}_{int} = -\frac{1}{4f_\pi^2}\int d^4x \left[\pi\cdot\pi\,\partial_\mu\pi\cdot\partial^\mu\pi - \frac{1}{2}m_\pi^2\,\pi\cdot\pi\,\pi\cdot\pi\right] \tag{12.99}$$

である．アイソスピンと運動量が $(k_1 a)(k_2 b) \to (k_3 c)(k_4 d)$ とラベルされた π–π 散乱を考えよう．この過程の散乱振幅は

$$\begin{aligned} \langle k_3 c, k_4 d|\hat{S}|k_1 a, k_2 b\rangle &= \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_i}V}}\,\delta^{(4)}(k_1+k_2-k_3-k_4)\,\mathcal{A}, \\ \mathcal{A} &= i\left[\delta_{ab}\delta_{cd}\left(\frac{s-m_\pi^2}{f_\pi^2}\right) + \delta_{ac}\delta_{bd}\left(\frac{t-m_\pi^2}{f_\pi^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \delta_{ad}\delta_{bc}\left(\frac{u-m_\pi^2}{f_\pi^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{12.100}$$

で与えられる．ここで，マンデルスタム運動変数と呼ばれる $s=(k_1+k_2)^2$, $t=(k_1-k_3)^2, u=(k_1-k_4)^2$ を導入した．これらの変数は $s+t+u=4m_\pi^2$ をみたす．$a=b=c=d=3$ とすると，$\pi^0\pi^0\to\pi^0\pi^0$ の散乱振幅 $\mathcal{A}=im_\pi^2/f_\pi^2$ を得る．$\pi^+\pi^-\to\pi^0\pi^0$ の散乱については，$a=b=1$, $a=b=2$ と $a=1,b=2$, $a=2,b=1$ および $c=d=3$ が必要となる．これより，$\mathcal{A}=i(s-m_\pi^2)/f_\pi^2$ が得られる．

カイラル対称性のカレントも興味深い物理量である．実際，計算してみると次の結果を得る．

$$
\begin{aligned}
J^a_{L\mu} &= -i\frac{f_\pi^2}{2}\mathrm{Tr}(t^a\partial_\mu U\,U^{-1}),\\
J^a_{R\mu} &= i\frac{f_\pi^2}{2}\mathrm{Tr}(t^a U^{-1}\partial_\mu U),\\
J^a_{V\mu} &= J^a_{L\mu}+J^a_{R\mu} = i\frac{f_\pi^2}{2}\mathrm{Tr}t^a\left(U^{-1}\partial_\mu U-\partial_\mu U\,U^{-1}\right),\\
J^a_{A\mu} &= J^a_{L\mu}-J^a_{R\mu} = -i\frac{f_\pi^2}{2}\mathrm{Tr}t^a\left(U^{-1}\partial_\mu U+\partial_\mu U\,U^{-1}\right).
\end{aligned}
\tag{12.101}
$$

これらを M の級数で展開すると，π 中間子のみが現れる項は

$$
\begin{aligned}
J^a_{L\mu} &\approx \frac{1}{2}f_\pi\partial_\mu\pi^a-\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c+\cdots,\\
J^a_{R\mu} &\approx -\frac{1}{2}f_\pi\partial_\mu\pi^a-\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c+\cdots,\\
J^a_{V\mu} &\approx -\epsilon^{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c+\cdots,\\
J^a_{A\mu} &\approx f_\pi\partial_\mu\pi^a+\cdots
\end{aligned}
\tag{12.102}
$$

となる．自発的に破れる対称性に対応する軸性ベクトル・カレントの公式は一般的な結果 (12.70) と一致することに注意しよう．π 中間子の 1 粒子状態 $|kb\rangle$ をもちいると，

$$
\langle 0|J^a_{A\mu}|kb\rangle = -if_\pi k_\mu\delta^{ab}\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}}
\tag{12.103}
$$

を得る．$J^a_{A\mu}$ が保存するならば上の関係式は $k^2=0$ を与えるので，これはパイ中間子が無質量の場合には都合がよい．いまの場合は，クォーク質量による明示的なカイラル対称性の破れによりカレントは保存しない．よって，上式から

$$\langle 0|\partial_\mu J_A^{a\mu}|kb\rangle = -m_\pi^2 f_\pi \delta^{ab} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{12.104}$$

が得られる．これは PCAC（Partial Conservation of Axial-vector Current, 軸性カレントの部分的保存）関係式として知られている．

12.11　有効ラグランジアンの適用範囲と S 行列のユニタリー性

カイラル対称性の破れを表す有効作用をもちいて，QCD 理論の低エネルギーにおける性質を特徴づけることができた．この作用は対称性に基づいて書き下されたが，原理的には QCD の作用から直接導出できるはずである．このように，低エネルギー有効作用が構成され，それがさまざまな計算に応用できる例は数多くある．ある意味では，我々のもちいるすべての作用はこの種の作用であると言える．というのも，素粒子の相互作用を記述する標準模型は，およそ TeV 以上の高エネルギーではいまだ検証されていないからである．有効ラグランジアンは低運動量近似に基づいているので，その使用には明らかな適用範囲が存在する．運動量のカットオフ値を超えた散乱やその他の過程を扱うには，有効ラグランジアンを修正しなければならない．また，一般に，有効ラグランジアンは繰り込み不可能な項を含む．よって，カットオフを伴う計算が必要となる．では，このカットオフ値は有効ラグランジアンそれ自体から評価できるのであろうか？ この問いが特に重要となるのは，理論の高エネルギーでの振る舞いが不明で，低エネルギーでの実験に基づいた現象論的な理論しか得られない場合である．以下では，S 行列のユニタリー性をもちいたカットオフの評価法を紹介しよう．

5 章で示したように，散乱の演算子は

$$\begin{aligned} \hat{S} &= U(\infty, -\infty), \\ U(x^0, y^0) &= T \exp\left[\int_{y^0}^{x^0} d^4x \; \mathcal{L}_{int}(\phi_{in}, \chi_{in}, \ldots)\right] \end{aligned} \tag{12.105}$$

で与えられる．ここで，U はユニタリー演算子で，これよりユニタリー条件 $\hat{S}^\dagger \hat{S} = 1$ が得られる．この条件は理論の確率保存則を保証する．$\mathcal{L}_{int}$ に現れる場は自由入射場である．

S 行列のユニタリー性は散乱断面積や崩壊確率などに一般的な拘束条件を与える．例えば，運動量 k_1, k_2 の 2 粒子が複数粒子に散乱する場合を考えてみよう．始状態は $|i\rangle = |k_1, k_2\rangle$ となる．簡単のため，入射粒子は同種でないと仮定しよう．$\hat{S} = 1 + iT$ と書くと，ユニタリー条件は

$$i(T - T^\dagger) + T^\dagger T = 0 \tag{12.106}$$

となる．状態 $|i\rangle$ についてこの関係式の行列要素をとり，状態の完全性 $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ をもちいると，

$$\sum_f |\langle f|T|i\rangle|^2 = -i\,\langle i|(T - T^\dagger)|i\rangle \tag{12.107}$$

を得る.（ここでは短距離力を仮定するので，前方散乱の振幅に発散は現れない.）$\langle f|T|i\rangle$ は始状態 $|i\rangle$ が $|f\rangle$ に散乱されるときの遷移確率である．これは

$$\langle f|T|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1} V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_2} V}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p - k_1 - k_2 \right) \mathcal{M}_{fi} \prod_j \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p_j} V}} \tag{12.108}$$

と表せる．ここで，$\mathcal{M}_{fi}$ は不変な振幅要素である．これより，全断面積 σ を計算すると

$$\sum_f |\langle f|T|i\rangle|^2 = \sigma\tau\, \frac{\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2} V} \tag{12.109}$$

となる．ここで，τ は相互作用の総時間である．また，フラックスの公式 (5.52) をもちいた．

$\langle i|T|i\rangle$ では，始状態と終状態が同じなので，5 章で説明したように運動量保存の δ 関数は $V\tau$ で置き換えられる．このとき，

$$\langle i|T|i\rangle = \frac{1}{2\omega_{k_1} V} \frac{1}{2\omega_{k_2} V}\, V\tau\, \mathcal{M}_{ii} \tag{12.110}$$

と書ける．終状態が始状態と同じなので，$\mathcal{M}_{ii}$ は（弾性）前方散乱の不変振幅要素である．(12.109) と (12.110) の結果をユニタリー条件式 (12.107) に代入すると，

$$\sigma = -i \frac{(\mathcal{M}_{ii} - \mathcal{M}_{ii}^*)}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}_{ii}}{[(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{12.111}$$

を得る．ここで，$s=(k_1+k_2)^2$ である．全断面積と前方散乱振幅の虚部との間のこの関係式 (12.111) は光学定理として知られている．

ユニタリー性はまた断面積のエネルギー依存性に制限を与える．これを具体的に示すには，散乱行列を（部分的に）対角化する基底を見出す必要がある．例えば，散乱振幅の解析でもちいられる部分波展開では，角運動量による基底が必要である．ここでは，より簡単な解析をもちいて，ユニタリー性による制限を示すにとどめよう．スピンのない 2 粒子による運動量 k_1，$k_2 \to p_1$，p_2 の弾性散乱を考える．$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{0}$ となる重心系では，基本的な運動変数は $s=(k_1+k_2)^2$ と散乱角度 $\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{p}_1=|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta$ である．不変行列要素 $\mathcal{M}$ は s と $\cos\theta$ の関数である．公式 (12.108) をもちいると，全断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma_{el} &= \frac{1}{4\sqrt{(k_1\cdot k_2)^2-m_1^2m_2^2}}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{p_1}}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{p_2}} \\ &\quad\times (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2)|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2 d\Omega_p \end{aligned} \tag{12.112}$$

と計算できる．ただし，運動学（つまりエネルギーと運動量の保存側）から導かれる結果

$$|\boldsymbol{p}_1|^2=|\boldsymbol{p}_2|^2=\frac{[(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2]}{4s} \tag{12.113}$$

をもちいた．(12.111) に現れる $\mathrm{Im}\,\mathcal{M}_{ii}$ は $\theta=0$ で評価された弾性散乱振幅の虚部である．したがって，不等式 $(\mathrm{Im}\,\mathcal{M}_{ii})^2 \le |\mathcal{M}|^2(\theta=0)$ が明らかに成り立つ．これより，

$$\sigma^2 \le \frac{64\pi^2 s}{[(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2]}\left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega_p}\right)_{\theta=0} \tag{12.114}$$

がわかる．

この議論を次元がゼロより大きい，したがって繰り込み不可能な有効ラグランジアンの項に適用しよう．例として，次のような項を考える．

$$\mathcal{L}_{int}=g\int d^4x\;(\partial\varphi)^2\chi^2. \tag{12.115}$$

φ, χ はスカラー場でそれぞれ質量 m_1, m_2 をもつとする．g は質量次元が -2 の結合定数である．これは中間子の有効ラグランジアンに現れるパラメータ $1/f_\pi^2$ と類似した定数である．g の最低次で，$\varphi\chi \to \varphi\chi$ の弾性散乱振幅は

$$\mathcal{M} = 4g\, k_1 \cdot p_1 \tag{12.116}$$

で与えられる．ここで，k_1, p_1 は φ 粒子の散乱前後の運動量である．このとき断面積は

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega_p}\right)_{\theta=0} &= \frac{g^2}{4\pi^2 s} m_1^4 \\ \sigma_{el} &= \frac{g^2}{\pi s}\left(\omega_{k_1}^4 + \frac{1}{3}p_1^4\right)\end{aligned} \tag{12.117}$$

となる．σ_{el} は s が大きいとき s に比例して増加することに注意しよう．$\sigma_{el} \leq \sigma$ なので，大きな s を仮定すると不等式 (12.114) は

$$s^2 \leq \frac{48\pi m_1^2}{g} \tag{12.118}$$

となる．これより，最低次オーダーの計算では，$s \geq \sqrt{48\pi m_1^2/g}$ のエネルギーになるとユニタリー性が破れることがわかる．このエネルギーに達する前に有効理論をより基本的な理論，あるいは少なくともより多くの場を含む理論に置き換える必要がある．（これはかなり近似的な上限値であり，ユニタリー性についてのより詳細な解析からさらに厳しい上限値が得られる．）この議論はループ計算を考慮しても本質的に成り立つ．つまり，有効理論のループ運動量にカットオフを課し，有効作用 Γ を構成することができる．その際，Γ は次元が次々と高まってゆくような一連の項で表せる．S 行列の要素は，Γ の運動方程式を解き，(8.115) に従って Γ をその解で評価することにより計算できる．その計算は本質的にはここでの導出と同じである．これらのユニタリー性の適用範囲は Γ のパラメータに課される拘束条件とみなすことができる．

12.12　ゲージ対称性とヒッグス機構

ここまで大域的な対称性の自発的破れについて議論してきた．大域対称性

の変換行列は時空間座標によらない．局所的な対称性（すなわちゲージ対称性）の自発的な破れがある場合，ゴールドストンの定理は適用できない．この場合は，質量をもつゲージボソンが現れる．$U(1)$ ゲージ理論を例にこれを示そう．

複素スカラー場を伴う $U(1)$ ゲージ理論の作用は

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \lambda \left(\phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right] \quad (12.119)$$

となる．ゲージ変換は

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \theta(x), \\ \phi \to \phi' &= \exp\left(ie\theta(x) \right) \phi \end{aligned} \quad (12.120)$$

で与えられる．この模型はしばしばアーベル型ヒッグス模型と呼ばれる．（この節では議論の便宜上 ϕ を古典場，量子場の両方にもちいる．）(12.119) におけるエネルギーは ϕ が $v/\sqrt{2}$ の値をもつときに最小となる．量子論ではこの値は真空期待値として実現される．この値のまわりの場の揺らぎを ϕ のパラメータ表示

$$\phi(x) = \exp\left(ie\xi(x) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \rho) \quad (12.121)$$

をもちいて考えよう．上式を作用 (12.119) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^4x \Big[& -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho) + \frac{1}{2} e^2 W_\mu W^\mu (v + \rho)^2 \\ & -\lambda v^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 \Big] \end{aligned} \quad (12.122)$$

を得る．ここで，$W_\mu = A_\mu - \partial_\mu \xi$ である．理論を A ではなく W で書き換えることができる．これらはゲージ変換で関係づけられるので，$F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(W)$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_W + \mathcal{S}_\rho + \mathcal{S}_{int}, \\ \mathcal{S}_W &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(W) F^{\mu\nu}(W) + \frac{1}{2} e^2 v^2 W_\mu W^\mu \right], \\ \mathcal{S}_\rho &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial \rho)^2 - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \rho^2 \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{int} = \int d^4x \left[e^2 v\rho W_\mu W^\mu + \frac{e^2}{2}\rho^2 W_\mu W^\mu - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 \right] \tag{12.123}$$

と表せる．この作用から粒子の構成が読み取れる．まず，質量 ev をもつゲージ粒子がある．この W_μ の質量項は ϕ の運動項から導かれた．また，$m^2 = 2\lambda v^2$ となる質量をもつスカラー粒子 ρ がある．さらに，数多くの相互作用項があることもわかる．無質量の南部–ゴールドストン粒子は存在しないことに注意しよう．南部–ゴールドストン場と期待されるのは (12.121) の $\xi(x)$ であるが，この場はゲージ変換性 (12.120) から，ゲージ・パラメータのように振る舞うことがわかる．実際，ϕ と $e^{ie\theta}\phi$ は物理的に同じなので，ϕ の真空値をある関数 θ をもちいて $e^{ie\theta}v/\sqrt{2}$ と表せる．そこで，θ を適切に選べば場 ϕ から ξ を除くことができる．言い換えると，ξ はゲージ変換によってゲージポテンシャルに移動させることができる．これは，上で行ったように ξ をベクトル場 W_μ に吸収することと同じである．したがって，作用 (12.123) はある特定のゲージのもとでの表示になっている．このゲージ選択はユニタリーゲージと呼ばれる．W^2 の項が $(W + \partial\theta)^2$ の形で表されるゲージ変換を施すと，この作用はさらに別のゲージで表すことができる．南部–ゴールドストン場に類似した場がゲージ場に吸収されて，そのゲージ場が質量をもつ場となるこのような枠組みは，ヒッグス機構として知られている．

無質量モードを除去するに際し，ゲージ対称性がいかに重要であるかをハミルトニアン形式をもちいて見てみよう．これは，6 章での電磁場の議論と関連している．すでに見たように，ゲージを $A_0 = 0$ ととると，その空間成分は $A_i = A_i^T + \partial_i f$ と分解できる．ここで A_i^T は横波成分，つまり $\partial_i A_i^T = 0$ である．パラメータ表示 (12.121) をもちいると，作用の ϕ 部分は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\phi &= \int d^4x \, \frac{e^2v^2}{2} \left[\dot{\xi}^2 - \left(\partial_i(\xi - f) - A_i^T \right)^2 \right] \\ &= \int d^4x \, \frac{e^2v^2}{2} \left[\dot{\xi}^2 - \left(\partial_i(\xi - f) \right)^2 - A_i^T A_i^T \right] \end{aligned} \tag{12.124}$$

と書ける．ρ 場はここでの議論に重要でないので無視した．これより A_i の横波成分が質量 ev をもつのは明らかである．ξ の運動方程式は

$$\ddot{\xi} - \partial_i \partial_i \tilde{\xi} = 0 \tag{12.125}$$

となる．ただし，$\tilde{\xi} = \xi - f$ である．A_0 成分の運動方程式，あるいはこの理

論のガウス則は

$$\partial_i(\partial_i \dot{f}) - e^2 v^2 \dot{\xi} = 0 \tag{12.126}$$

となる．これは $\dot{\xi}$ について解くことができる．フーリエ展開されたモードをもちいると

$$\dot{\xi}_k = \left[\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + e^2 v^2}\right]\dot{\tilde{\xi}}_k \tag{12.127}$$

となる．これを (12.125) に代入すると，

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + e^2 v^2\right]\tilde{\xi}_k = 0 \tag{12.128}$$

を得る．$\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，$\omega^2 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + e^2 v^2$ となる．これより，このモードも ev と同じ質量をもつことがわかる．このモードについての結果は連続的に $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ へ拡張することができる．(空間成分が一定であるようなモードをとることもできる．その向きは前に議論した真空の向きに関係している．)

すでに議論したように，理論の真のゲージ群は空間の無限遠で恒等変換となるようなすべてのゲージ変換（10 章の記号をもちいれば $\mathcal{G}_*$）で与えられる．この真のゲージ対称性はここでは破れていないことに注意しよう．実際，ゲージ対称性は無質量モードを除去するに当たり本質的な働きをしている．破れているのは対称性の大局的な部分であり，これは $\mathcal{G}/\mathcal{G}_*$ に対応する．このことをゲージ不変な場 χ をもちいて，より詳しく見てみよう．クーロン–グリーン関数 $G_C(x,y)$ をもちいると，ϕ と A_i のゲージ不変な組み合わせ

$$\chi = \exp\left(-ie\int d^3y\ G_C(x,y)\partial_i A_i(y)\right)\phi \tag{12.129}$$

を構成することができる．これは，無限遠で恒等変換となる変換のもとで不変である．無限遠で一定となる変換のもとでは，χ は $\chi \to e^{ie\theta(\infty)}\chi$ と変換する．したがって，χ はゲージ不変であるが，$\mathcal{G}/\mathcal{G}_*$ のもとで変換するので電荷をもつ．ポテンシャルは $V(\phi) = V(\chi)$ となる．よって，χ の真空期待値は $v/\sqrt{2}$ である．χ がこのようにゼロでない値をもつことは，真空が $\mathcal{G}_*$ のもとで不変であることと矛盾しない．ϕ をもちいると，

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \exp\left(-ie\int d^3y\ G_C(x,y)\partial_i A_i(y)\right)\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{12.130}$$

と書ける．ϕ のパラメータ表示 (12.121) は

$$\phi = \exp(ie\tilde{\xi}) \exp\left(-ie \int d^3y\; G_C(x,y)\partial_i A_i(y)\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho) \qquad (12.131)$$

となる．これをガウス則と組み合わせると，

$$\mathcal{S}_\phi = \int d^4x\; \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - e^2v^2\varphi^2\right] \qquad (12.132)$$

を得る．ただし

$$\varphi = ev\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+e^2v^2}}\,\tilde{\xi} \qquad (12.133)$$

である．真空が $\langle 0|\chi|0\rangle = v/\sqrt{2}$ あるいは (12.130) で定義されることは，この状況がゲージ対称性の自発的な破れと呼ばれているにもかかわらず，$\mathcal{G}_*$ 対称性が破れていないことを示す．一方，χ の真空期待値は大域的な $U(1)$ 対称性を破っている．

ヒッグス機構は理論の自由度を変えない．対称性が破れる前は，ϕ の絶対値と位相およびゲージ粒子の横波偏極 2 成分が合計 4 つの物理的な場を表していた．対称性が破れた後は，ゲージボソンは質量をもち 3 つの偏極成分をもつ．ρ と合わせると，4 つの独立な場が残る．南部–ゴールドストン・ボソンに類似した場は質量ベクトル粒子の偏極第 3 成分となる．

つぎに，この議論の非アーベル型対称性への拡張を考えよう．ゲージ場の質量項は次のスカラー場の運動項から現れる．

$$\mathcal{S}_\phi = \int d^4x\; \left[(D_\mu\phi)^*_a(D^\mu\phi)_a - V(\phi^*_a\phi_a)\right]. \qquad (12.134)$$

ただし，ϕ_a は対称性を表す群 G のある表現として変換する．共変微分は $(D_\mu\phi)_a = \partial_\mu\phi_a - ieA^A_\mu(T^A)_{ab}\phi_b$ である．ϕ がゼロでない真空期待値をもつとき，これは

$$\phi_a = g_{ab}(x)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(v_b+\rho_b) \qquad (12.135)$$

とパラメータ表示できる．対称性 G は $H\subset G$ へ破れる．H 変換は $v_b+\rho_b$ に恒等的に作用するので，実際には G/H の要素のみが (12.135) に現れる．これを (12.134) に代入し，ユニタリーゲージをとると

$$\mathcal{S}_\phi = \int d^4x\; \left[\frac{1}{2}g^2\, v^T(T^AT^B)v\, W^A_\mu A_{B\mu} + (\,\rho\,\text{の項}\,)\right] \qquad (12.136)$$

を得る．W^A_μ は A^A_μ のユニタリーゲージをとったものである．リー代数 H の

生成子は真空の値 v^a を消滅させるので，コセット方向の質量行列はゼロ行列ではなくなる．破れた生成子に対応するゲージボソンは質量を獲得し，その質量行列は $(M^2)^{AB} = g^2\, v^T(T^AT^B)v$ で与えられる．また，自由度の数え上げも同様に一致することが確認できる．

最後に，ここまでスカラー場をもちいて対称性の破れを記述してきたが，QCD のカイラル対称性の破れの場合と同じように，複合演算子が真空期待値をもつことで対称性を破ることも可能である．この場合，南部–ゴールドストン・ボソンの有効作用はゲージ粒子の質量項となる．

12.13　標準模型

重力を除いて，現在知られているすべての素粒子と相互作用は標準模型によって記述される．これはゲージ群 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ に基づく理論であり，$SU(3)$ は QCD に，$SU(2)\times U(1)$ は電弱相互作用にそれぞれ対応し，これらの群に対応するゲージボソンが存在する．物質場は 3 つのタイプ，つまりレプトン，クォーク，ヒッグス・スカラー場に分類される．電弱 $SU(2)\times U(1)$ 対称性は $U(1)$ 部分群に自発的に破れ，これは電磁相互作用のゲージ群とみなされる．電弱ゲージ場は左右のカイラル成分 $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1\pm\gamma^5)\psi$ に対して同じようには結合しないので，パリティ対称性はあからさまに破られている．したがって，種々の場の変換性を特定するには，場をカイラル成分に分離したほうが簡単になる．共変微分は一般に

$$D_\mu\chi = \left(\partial_\mu - ie_sA_\mu^AT^A - igb_\mu^at^a - ig'\frac{Y}{2}c_\mu\right)\chi \tag{12.137}$$

と書ける．ただし，χ は任意の場を表す．A_μ^A, b_μ^a, c_μ はそれぞれ $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$ に対応するゲージ場である．e_s は強い相互作用 (QCD) の結合定数，g, g' は $SU(2)$ と $U(1)$ 群の結合定数である．T^A, t^a はそれぞれ $SU(3)$ と $SU(2)$ の生成子に対応する行列であり，その表現は χ の属する表現で与えられる．Y は場 χ の $U(1)$ 電荷（チャージ）であり，これは弱い相互作用のハイパーチャージと呼ばれる．理論の物質場については表 12.1 のとおりである．ただし，場 l はレプトン場，Q はクォーク，そして ϕ はヒッグス・ス

カラー場を表す．フェルミオン場は同じパターンが3回繰り返されていることに注意しよう．これらは3世代と言われ，通常それぞれ電子世代，ミュー粒子世代，タウ粒子世代と呼ばれる．これらをまとめて l^i, Q^i などと表すことができる．ただし，$i = 1, 2, 3$ は3つの世代を示す添え字である．

表 12.1 標準模型の物質場.

場 χ	$SU(3)$ 表現	$SU(2)$ 表現	$U(1)$ 電荷
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	1	2	-1
$l_R = e_R,\ \mu_R,\ \tau_R$	1	1	-2
$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	3	2	$\frac{1}{3}$
$U_R = u_R,\ c_R,\ t_R$	3	1	$\frac{4}{3}$
$D_R = d_R,\ s_R,\ b_R$	3	1	$-\frac{2}{3}$
$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1	2	1

表12.1では，表現をその表現次元で示した．1重項の表現の場合，T^A と t^a はゼロになる．クォークはQCDの $SU(3)$ 群の3重項なので，$T^A = \frac{1}{2}\lambda^A$ $(A = 1, 2, \ldots, 8)$ ととれる．ただし，λ^A は

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.138}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．

T^A は交換関係 $[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C$ に従う．構造定数 f^{ABC} は上の行列から直接計算することができる．$SU(2)$ の 2 重項については $t^a = \frac{1}{2}\tau^a$ と書ける．ここで，τ^a $(a = 1, 2, 3)$ はパウリ行列で，$[t^a, t^b] = i\epsilon^{abc}t^c$ をみたす．場の電荷は $Q = t^3 + \frac{1}{2}Y$ で与えられる．これら物質場の表現から，変換

$$\hat{g} = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}T^8 2\sqrt{3}\right) \exp\left(i2\pi t^3\right) \exp\left(i\pi Y\right) \tag{12.139}$$

は恒等変換として振る舞うことがわかる．すべての場はこの変換のもとで不変である．$\hat{g}$ とその積は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の離散的な部分群 C を成す．したがって，標準模型のゲージ群は厳密には

$$G = \frac{SU(3) \times SU(2) \times U(1)}{C} \tag{12.140}$$

となる．

各ゲージ場に対応する場の強さのテンソルは

$$\begin{aligned} F^A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu + e_s f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu, \\ G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu b^a_\nu - \partial_\nu b^a_\mu + g\epsilon^{abc} b^b_\mu b^c_\nu, \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu \end{aligned} \tag{12.141}$$

である．ここで，理論の作用は次のように書ける．

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}_\phi\right],$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_g &= -\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}, \\
\mathcal{L}_f &= \sum_i \bar{Q}^i_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie_s T^A A^A_\mu - igt^a b^a_\mu - i\frac{g'}{6}c_\mu\right) Q^i_L \\
&\quad + \bar{U}^i_R i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie_s T^A A^A_\mu - i\frac{2g'}{3}c_\mu\right) U^i_R \\
&\quad + \bar{D}^i_R i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie_s T^A A^A_\mu + i\frac{g'}{3}c_\mu\right) D^i_R \\
&\quad + \bar{l}^i_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igt^a b^a_\mu + i\frac{g'}{2}c_\mu\right) l^i_L + \bar{l}^i_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'c_\mu) l^i_R, \\
\mathcal{L}_{Yuk} &= -f^l_{ij}\bar{l}^i_L \phi\, l^j_R - f^u_{ij}\bar{Q}^i_L\tilde{\phi}\, U^j_R - f^d_{ij}\bar{Q}^i_L \phi\, D^j_R + \text{h.c.}, \\
\mathcal{L}_\phi &= \left| \left(\partial_\mu - igt^a b^a_\mu - i\frac{g'}{2}c_\mu\right)\phi\right|^2 - \lambda\left(\phi^\dagger\phi - \frac{v^2}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{12.142}
$$

ただし，$\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$ である．また h.c. はエルミート共役 (hermitian conjugate) を表す．$\tilde{\phi}$ は ϕ と同様に $SU(2)$ のもとで変換するが，ϕ とは反対の $U(1)$ チャージをもつ．l^i_R は 3 つの荷電レプトン e_R, μ_R, τ_R を表す．ここで，ニュートリノの質量は非常に小さいため無視した．また右巻きのニュートリノも無視した．カイラリティが右のニュートリノおよびニュートリノ質量を理論に含めるには，いわゆるマヨラナ型の結合とマヨラナ質量をもちいればよい．これらについてはここでは議論しない．

つぎに，理論を変形して $SU(2)\times U(1)$ 部分のみを考えよう．スカラー場の作用は，ゼロでない真空期待値 ϕ^0 を与えるポテンシャル・エネルギーを含む．すなわち，

$$
\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{12.143}
$$

となる．この真空期待値は $SU(2)\times U(1)$ 対称性を自発的に破る．期待値 (12.143) の等方群は電磁場に対応した $U(1)_{em}$ で，これは電荷演算子 Q によって生成される．したがって，ここでの破れは $SU(2)\times U(1) \to U(1)_{em}$ である．線形結合

$$
A_\mu = \frac{g'\, b^3_\mu + g\, c_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = b^3_\mu \sin\theta_W + c_\mu \cos\theta_W \tag{12.144}
$$

は電磁ゲージ場を与え，無質量となる．また，$\sin\theta_W = g'/\sqrt{g^2+g'^2}$ であり，θ_W はワインバーグ角と呼ばれる．このゲージ場に直交する組み合わせ

$$Z_\mu = \frac{g\,b^3_\mu - g'\,c_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} = b^3_\mu \cos\theta_W - c_\mu \sin\theta_W \tag{12.145}$$

と 2 つの場 $W^\pm_\mu = (b^1_\mu \mp i b^2_\mu)/\sqrt{2}$ は質量を獲得する．

真空期待値 (12.143) のまわりでの展開式から粒子の構成と相互作用の特性を理解することができる．ヒッグス場の一般的なパラメータ表示は

$$\phi = U(\zeta)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \tag{12.146}$$

で与えられる．ここで，$U(\zeta) = \exp(i\tau^a\zeta^a/2)$ は $SU(2)$ の要素で，$\zeta^a(x)$ は南部–ゴールドストン・ボソンに類似した場である．これをラグランジアンに代入すると，ゲージ不変性により場 ζ^a はゲージポテンシャルに吸収されることがわかる．これはユニタリーゲージへの変換である．このゲージにおいて，電弱ラグランジアンのゲージ場とヒッグス場の項は次のように変形される．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2}|\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu|^2 \\ &+ M_W^2 W^+_\mu W^{-\mu} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}(\partial\eta)^2 - \frac{1}{2}M_H^2\eta^2 + \mathcal{L}_{int},\end{aligned} \tag{12.147}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = &-\frac{e^2}{2}|A_\mu W_\nu - A_\nu W_\mu|^2 - \frac{g^2}{2}\cos^2\theta_W\,|Z_\mu W_\nu - Z_\nu W_\mu|^2 \\ &- ieA^\mu\left[W^{-\nu}(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu) - W^{+\nu}(\partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu)\right] \\ &- ig\cos\theta_W Z^\mu\left[W^{-\nu}(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu) - W^{+\nu}(\partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu)\right] \\ &+ ieW^{+\mu}W^{-\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + ig\cos\theta_W W^{+\mu}W^{-\nu}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) \\ &- eg\cos\theta_W Z^\mu\left[(A_\mu W^-_\nu - A_\nu W^-_\mu)W^{+\nu} + (A_\mu W^+_\nu - A_\nu W^+_\mu)W^{-\nu}\right] \\ &+ \frac{g^2}{4}(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu)^2 + 2\frac{M_W^2}{v}W^{+\mu}W^-_\mu\eta + \frac{M_W^2}{v^2}W^{+\mu}W^-_\mu\eta^2 \\ &+ \frac{M_Z^2}{v}Z^\mu Z_\mu\eta + \frac{M_Z^2}{2v^2}Z^\mu Z_\mu\eta^2 - \frac{M_H^2}{2v}\eta^3 - \frac{M_H^2}{8v^2}\eta^4.\end{aligned} \tag{12.148}$$

ただし，$e = g\sin\theta_W$ は電子の電荷である．ツリーレベルの最低次のオーダーで，ゲージボソンの質量は $M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v$, $M_W = \frac{1}{2}g\,v$ となる．実験

によると，$M_Z \approx 91\,\mathrm{GeV}$, $M_W \approx 80\,\mathrm{GeV}$, $\sin^2\theta_W = 0.223$ である．また，電弱相互作用のスケールは $v \approx 246\,\mathrm{GeV}$ となる．これらの値は実験で得られたものである．場 η で表されるヒッグス・スカラー粒子の質量は $M_H = \sqrt{2\lambda}\,v$ で与えられる．実験から λ の値を決めなければならないので，この質量についての数値的な予測はまだなされていない．

ϕ の真空値はゼロでないので，湯川相互作用 $\mathcal{L}_{Yuk}$ はフェルミオンに質量を与える．これらは一般に質量行列を成す．なぜなら，結合定数 f_{ij} は必ずしも対角化されるとは限らないからである．クォークのセクターでこれがどのように起こるか見てみよう．ここで現れる質量項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= -M^u_{ij}\bar{U}^i_L U^j_R - M^d_{ij}\bar{D}^i_L D^j_R + \text{h.c.}, \\ M^u_{ij} &= f^u_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad M^d_{ij} = f^d_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{12.149}$$

と書ける．U_L, D_L はそれぞれアップクォーク，ダウンクォークの場のカイラル成分である．物理的な粒子は質量の固有状態であるので，質量行列 M^u, M^d を対角化する必要がある．ここでは，これらの行列の行列式はゼロではないとする．行列式がゼロとすると，これは質量がゼロとなる場があることを意味する．この場合は，この場を分離して残りの行列について以下の議論を適用すればよい．行列式がゼロでない任意の複素行列 M は，$M = HU$ と分解できる．ただし，H はエルミート行列，U はユニタリー行列である．H をユニタリー行列 S をもちいて $H = S^\dagger M_{diag} S$ と対角化しよう．これより，M は $M = S^\dagger M_{diag}(SU) = S^\dagger M_{diag} T$ と書ける．S と T はユニタリー行列である．よって，M は双ユニタリー (biunitary) 変換で対角化される．この対角化をもちいると，質量項は

$$\mathcal{L}_{mass} = \bar{U}_L S^{u\dagger}\mathcal{M}^u T^u U_R + \bar{D}_L S^{d\dagger}\mathcal{M}^d T^d D_R + \text{h.c.} \tag{12.150}$$

と書ける．$\mathcal{M}^u$, $\mathcal{M}^d$ は対角行列である．ここで，クォーク場を

$$\begin{aligned} U_R &\to T^{u\dagger}U_R, \qquad D_R \to T^{d\dagger}D_R, \\ U_L &\to S^{u\dagger}U_L, \qquad D_L \to S^{d\dagger}D_L \end{aligned} \tag{12.151}$$

と再定義すると，

$$\mathcal{L}_{mass} = \bar{U}_L\mathcal{M}^u U_R + \bar{D}_L\mathcal{M}^d D_R + \text{h.c.} \tag{12.152}$$

を得る．このクォーク場の再定義は質量項を対角化するが，これにより W_μ との相互作用項は変形をうける．

$$\begin{aligned} \bar{D}_L\gamma_\mu U_L &\to \bar{D}_L S^d S^{u\dagger}\gamma_\mu U_L, \\ \bar{U}_L\gamma_\mu D_L &\to \bar{U}_L S^u S^{d\dagger}\gamma_\mu D_L \end{aligned} \tag{12.153}$$

となるので，W ボソンとの相互作用項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g}{\sqrt{2}}(W^{+\mu}J_\mu^- + W^{-\mu}J_\mu^+), \\ J_\mu^- &= V_{ij}\bar{U}_L^i\gamma_\mu D_L^j, \\ J_\mu^+ &= V_{ji}^*\bar{D}_L^i\gamma_\mu U_L^j \end{aligned} \tag{12.154}$$

と書ける．ここで，$V_{ij} = (S^u S^{d\dagger})_{ij}$ はカビボ–小林–益川 (CKM) 行列と呼ばれる．これはクォークの弱い相互作用についての混合角を与える．

電磁カレントは

$$J_\mu^{em} = \frac{2}{3}\left(\bar{U}_L\gamma_\mu U_L + \bar{U}_R\gamma_\mu U_R\right) - \frac{1}{3}\left(\bar{D}_L\gamma_\mu D_L + \bar{D}_R\gamma_\mu D_R\right) \tag{12.155}$$

で与えられる．これは (12.151) のような場の再定義をしても対角化されたままである．同様にカレント

$$J_\mu^3 = \frac{1}{2}\left(\bar{U}_L\gamma_\mu U_L - \bar{D}_L\gamma_\mu D_L\right) \tag{12.156}$$

も影響を受けない．さらに，ヒッグス–フェルミオン相互作用項は質量行列に比例し，質量行列が対角行列であるときに対角化されるので，ここで考えているようなヒッグス粒子が 1 つの模型では，ヒッグス粒子の媒介によってフレーバー混合過程は起きない．

これらの結果をまとめると，理論のクォーク項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{quark} = &\bar{U}^i(i\gamma\cdot\partial - \mathcal{M}_i^u)U^i + \bar{D}^i(i\gamma\cdot\partial - \mathcal{M}_i^d)D^i \\ &- \frac{1}{v}\bar{U}^i\mathcal{M}_i^u U^i\eta - \frac{1}{v}\bar{D}^i\mathcal{M}_i^d D^i\eta + eA^\mu J_\mu^{em} \\ &+ \frac{g}{\cos\theta_W}Z^\mu J_\mu^Z + \frac{g}{\sqrt{2}}(W^{+\mu}J_\mu^- + W^{-\mu}J_\mu^+) \end{aligned} \tag{12.157}$$

となる．中性カレント J_μ^Z は

$$J_\mu^Z = J_\mu^3 - J_\mu^{em}\sin^2\theta_W \tag{12.158}$$

で与えられる．

レプトン・セクターのカレントも同様に表される．ニュートリノの質量は右巻きのニュートリノを含めると考慮できる．ただし，左巻き・右巻きのニュートリノは同じ質量をもたないので，マヨラナ質量と呼ばれる量を導入する必要がある．ニュートリノ質量を無視すると，レプトン項は

$$\mathcal{L}_{lepton} = \bar{N}_L^i i\gamma\cdot\partial N_L^i + \bar{E}^i(i\gamma\cdot\partial - \mathcal{M}_i^e)E^i + \mathcal{L}_{int} \tag{12.159}$$

となる．ここで，N^i $(i=1,2,3)$ はそれぞれ電子ニュートリノ，ミューニュートリノ，タウニュートリノを表す．同様に，E^i $(i=1,2,3)$ はそれぞれ e, μ, τ を示す．レプトンの相互作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= eA^\mu J_\mu^{em} + \frac{g}{\cos\theta_W} Z^\mu J_\mu^Z + \frac{g}{\sqrt{2}}(W^{+\mu}J_\mu^- + W^{-\mu}J_\mu^+) \\
&\qquad - \frac{1}{v}\bar{E}^i\mathcal{M}_i^e E^i\eta, \\
J_\mu^- &= \bar{N}_L^i\gamma_\mu E_L^i, \\
J_\mu^+ &= \bar{E}_L^i\gamma_\mu N_L^i, \\
J_\mu^{em} &= -\bar{E}^i\gamma_\mu E^i, \\
J_\mu^Z &= \frac{1}{2}\left(\bar{N}_L^i\gamma_\mu N_L^i - \bar{E}_L^i\gamma_\mu E_L^i\right) - \sin^2\theta_W\, J_\mu^{em}
\end{aligned} \tag{12.160}$$

で与えられる．

世代数が n のとき CKM 行列 V は $(n\times n)$ ユニタリー行列である．ところが，混合角のなかには場の定義に吸収できるものがあるため，物理的なパラメータの数は n^2 にはならない．例えば，$V = U_{diag}\tilde{V}U'_{diag}$ と書ける．ここで，U, U' は対角化されたユニタリー行列，つまり対角要素が $e^{i\varphi}$ で表される位相にすぎない．そのような位相は U に n 個，また全体にかかる共通した位相の重複を除いて U' に $n-1$ 個ある．U と U' は $\bar{U}_L$ の D_L の定義に吸収することができる．U, U' は対角行列なので J_μ^3 と J_μ^{em} はこの定義によって影響を受けない．質量項は変形されるが U_R と D_R を同時に再定義できるので，質量項も影響を受けない．よって，$2n-1$ 個のパラメータを吸収できるので，CKM 行列における物理的なパラメータの数は $n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ である．したがって，3 世代のときは 4 つのパラメータがあり，これらは 3 つ

の実回転角度と残りの位相 1 つに対応している．この場合，V は実行列ではない．V が実行列でないことから，弱い相互作用による CP 対称性の破れが導かれる．フェルミオン場の CP 変換は

$$\psi(x) = C\,\tilde{\psi}^*(-\boldsymbol{x}, x^0) \tag{12.161}$$

で定義される．ここで，$\tilde{\psi}$ は ψ の CP 写像を表す．ディラック・ラグランジアン $\bar{\psi} i\gamma\cdot(\partial - igb^a t^a)\psi$ の不変性から，ゲージ場の変換は

$$-b_0^T(-\boldsymbol{x}, x^0) = \tilde{b}_0, \qquad b_i^T(-\boldsymbol{x}, x^0) = \tilde{b}_i \tag{12.162}$$

となることがわかる．ただし，T は行列 b の転置を表す．これを成分表示すると，

$$\begin{aligned} b_0^3 &= -\tilde{b}_0^3(-\boldsymbol{x}), & b_i^3 &= \tilde{b}_i^3(-\boldsymbol{x}), \\ W_0^+ &= -\tilde{W}_0^-(-\boldsymbol{x}), & W_i^+ &= \tilde{W}_i^-(-\boldsymbol{x}), \\ W_0^- &= -\tilde{W}_0^-(-\boldsymbol{x}), & W_i^- &= \tilde{W}_i^+(-\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{12.163}$$

となる．このとき，荷電カレントの相互作用は

$$\begin{aligned} \int W^{+\mu} J_\mu^- &= \int \tilde{W}^{-\mu}\left[\bar{\tilde{E}}^i_L \gamma_\mu \tilde{N}_L^i + \bar{\tilde{D}}^i_L \gamma_\mu \tilde{U}^j V_{ji}\right], \\ \int W^{-\mu} J_\mu^+ &= \int \tilde{W}^{+\mu}\left[\bar{\tilde{N}}^i_L \gamma_\mu \tilde{E}_L^i + \bar{\tilde{U}}^i_L \gamma_\mu \tilde{D}^j V_{ij}^*\right] \end{aligned} \tag{12.164}$$

となる．これより，作用の相互作用項は次の変換則に従うことが簡単に示せる．

$$S_{int}(N, E, U, D, V_{ij}) = S_{int}(\tilde{N}, \tilde{E}, \tilde{U}, \tilde{D}, V_{ij}^*). \tag{12.165}$$

$V = V^*$ なら CP 不変であることがわかる．クォークが 3 世代あるとき，V_{ij} のすべての行列要素が実数とは限らないので，CP 対称性は破れる．

最後に，ゲージ相互作用と（クォーク質量を導く）湯川相互作用により，前に議論したクォーク・セクターでのカイラル対称性が明示的に破れていることに注意しよう．電弱ゲージ対称性の観点で考えると，QCD カイラル対称性が自発的に破れることで，電弱ゲージ対称性は破れ，W, Z 粒子に質量が追加される．しかし，このカイラル対称性の破れのエネルギー・スケールは電弱スケールに比べて十分小さいので，この効果はヒッグス場の真空期待値による質量に対して無視できる．

参考文献

1. ゴールドストンの定理は次の文献による．J. Goldstone, Nuovo Cim. **9**, 154 (1961); Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960); J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).

2. マーミン–ワグナー–コールマンの定理は次の文献で与えられた．N.D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966); S. Coleman, Commun. Math. Phys. **31**, 259 (1973).

3. コセット空間についての良書としては R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc. (1974) がある．

4. 非線形シグマ模型は歴史的には次の文献で与えられた線形シグマ模型に由来する．M. Gell-Mann and M. Lévy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).

5. 南部–ゴールドストン・ボソンの動力学をコセット空間をもちいて記述するための有効ラグランジアンの一般的な構成は次の文献による．S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969); C.G. Callan, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969).

6. スピン波についての詳細については，例えば，R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co. (1972) を参照されたい．

7. π 中間子が南部–ゴールドストン・ボソンであるというアイデアは本質的に次の文献による．Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960); Y. Nambu and G. Lona Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).

8. 軽いクォークの質量の評価については S. Weinberg, in *A Festschrift for I.I. Rabi*, Trans. N.Y. Acad. Sci. **38**, 185 (1977) を参照されたい．

9. ヴァッファ–ウィッテンの定理は C. Vafa and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **53**, 535 (1984); Nucl. Phys. **B234**, 173 (1984); Commun. Math. Phys. **95**, 257 (1984) で与えられた．

10. 有効ラグランジアンをもちいた π 中間子の計算は S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18**, 188 (1967) に始まる．有効ラグランジアンの手法はその後，多くの論文で拡張・改良された．これについては J.F. Donoghue, E. Golowich and B.R. Holstein, *The Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press (1992) を参照されたい．

11. 本章ではゴールドバーガー–トライマンの関係式を導く際，軸性ベクトルの結合定数 g_A を 1 とした．これはここで使った有効ラグランジアンがバリオンを点粒子とみなし，形状因子の効果（クォーク束縛状態の波動関数による効果）を無視したためである．正式な関係式は論文 M.L. Goldberger and S. Treiman, Phys. Rev. **110**, 1178 (1958) で与えられているように $m_B g_A = g_{\pi \bar{N} N} f_\pi$ となる．アドラー–ワイスバーガーの和則をもちいて π 中間子と核子の積分断面積を計算すると，$g_A \approx 1.26$ の値が得られる．アドラー–ワイスバーガーの和則については S. Adler, Phys. Rev. Lett. **14**, 1051 (1965); W.I. Weisberger, Phys. Rev. Lett. **14**, 1047 (1965) を参照されたい．

12. メソンとバリオンについてのゲルマン–大久保の公式は以下の文献による．M. Gell-Mann, CalTech Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961)（これは M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W.A. Benjamin (1964) に再録されている）; S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **27**, 949 (1962).

13. PCAC 関係式は J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann and W. Thirring, Nuovo Cim. **17**, 757 (1960) による．これと関連して文献 4 の Gell-Mann と Lévy の論文および文献 7 の Nambu の論文も参照されたい．

14. 光学定理は N. Bohr, R. Peierls and G. Placzek, Nature **144**, 200 (1939). による．ユニタリー性の適用範囲については Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume I Foundations*, Cambridge University Press, (1995) を参照のこと．断面積のさまざまな適用範囲については R.J. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge University Press (1967) で導出，一覧表示されている．

15. ヒッグス機構の原論文は P.W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964); G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964); T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967) である．

16. 標準模型の $SU(2)\times U(1)$ 対称性は S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); A. Salam and J. Ward, Phys. Lett. **13**, 168 (1964) による．ヒッグス機構を組み込んだ $SU(2)\times U(1)$ 模型は S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); A. Salam, in *Elementary Particle Physics*, N. Svartholm (ed.), Almqvist and Wiksells, Stockholm (1968) で与えられた．チャーム・クォークの重要性は S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970) で認識された．

17. 強い相互作用の $SU(3)$ ゲージ対称性は H. Fritzsch and M. Gell-Mann, 16th International Conference on High Energy Physics, Chicago-Batavia, 1972; H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47** 365 (1973) で提案された．しかしこの模型が実際に成功を収めるのは D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973) によって漸近的自由性が発見されてからである．

18. 弱い相互作用の混合角は N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963); M. Kobayashi and M. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973) で導入された．

付録　相対論的不変性

A-1　自由粒子とポアンカレ代数

この付録では自由粒子の相対論的波動関数について簡単に議論しよう．相対論的な不変性に関係ある対称性変換は，（時空間の）並進変換と（空間の回転を含む）ローレンツ変換である．波動関数を得るには，この並進およびローレンツ変換がユニタリー変換として実現できるヒルベルト空間が必要となる．言い換えると，並進とローレンツ変換の代数の既約ユニタリー表現 (UIR) が必要となる．ユニタリー性の要請は，量子力学においてすべての物理的観測量がヒルベルト空間上のユニタリー変換を与えることから明らかであろう．既約性についてはもう少し複雑なので，以下では復習を兼ねて，似たような状況がある非相対論的な量子力学の場合について考えてみよう．1 次元での粒子の振る舞いは，演算子 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ で記述され，それらは交換関係

$$[\hat{x}, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i \tag{A-1}$$

をみたす．この観測量の代数に対するユニタリー表現が必要となる．演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ を表す 1 つの方法は次のようなものである．まず規格化条件

$$\int dpdx\, \psi(x,p)^* \psi(x,p) = 1 \tag{A-2}$$

をみたす複素関数 $\psi(x,p)$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned} \hat{p}\psi &= -i\frac{\partial}{\partial x}\psi, \\ \hat{x}\psi &= \left(i\frac{\partial}{\partial p} + x\right)\psi \end{aligned} \tag{A-3}$$

と作用する演算子を考えることができる．しかし，波動関数が x と p の関数になっているので，これは明らかに誤った量子力学を与える．また，この表現が可換であることもわかる．実際に，波動関数に条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = 0 \tag{A-4}$$

を課しても，(A-1) の表現を得ることができる．特に，この場合

$$\hat{p}\psi = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi, \qquad \hat{x}\psi = x\psi \tag{A-5}$$

となる．このとき，規格化条件は

$$\int dx\, \psi^* \psi = 1 \tag{A-6}$$

ととれる．これが標準的なシュレーディンガー表示を与える．この表現は条件 (A-4) に従う部分関数空間から得られたので，以前の表現 (A-3) は可約であることがわかる．シュレーディンガー表示は既約であることが示せる．つまり，代数 (A-1) をみたす関数空間として上の部分空間より小さいものは存在しない．(より正確には，ベキ関数をとることで得られる有界演算子 (bounded operator) を考えなければならない.）したがって，量子力学が観測量の代数の既約ユニタリー表現とみなせることがわかった．(代数 (A-1) にはユニタリー等価な表現が 1 つ，つまりシュレーディンガー表示しか存在しない．これはストーンとフォン・ノイマンによって示された結果であり，ストーン–フォン・ノイマン定理として知られている．無限の自由度がある場合や単連結でない空間上では複数の UIR が存在し，そのため物理的な結果はどの UIR を選択するかによって異なることがある．これらの問題はいまの議論には直接関係ないが，関連する話題を 12, 15, 20 章で取り扱った.）

つぎに，相対論的な点粒子の問題に戻って，その対称性変換についてもう少し詳しく見てみよう．相対論的な点粒子の運動を表す作用は質量 m と固有距離の積で与えられる．すなわち，

$$\mathcal{S} = \int dt\, L = -m \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{A-7}$$

である．ここで，計量テンソルはミンコフスキー計量であり，そのデカルト座標成分は $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$（それ以外はすべてゼロ）となる．理論の対

称性は，明らかに固有距離 $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ に対しても対称性となっている．そこで，まず無限小変換をもちいて理解できる連続的な対称性について考えてみよう．ξ^μ を無限小として，

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{A-8}$$

と書く．これが固有距離の対称性変換であることを要請すると

$$\eta_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \eta_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} = 0 \tag{A-9}$$

を得る．この条件式の解は

$$\xi^\mu = a^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu \tag{A-10}$$

で与えられる．ここで，$a^\mu, \omega^{\mu\nu}$ は一定のパラメータで $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ をみたす．$\omega^{\mu\nu}$ はローレンツ変換の 6 つのパラメータであり，ω^{0i} は変換 (A-10) で結ばれる 2 つの座標系の相対速度である．また $\theta^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}$ は空間回転の角度を与え，a^μ は並進変換のパラメータである．(A-8) と (A-10) から，x^μ の任意の関数に対して，変換の生成子が

$$\begin{aligned}\delta f(x) &= \xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}f = a^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \omega^{\mu\nu}x_\nu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\\ &= \left(i\,a^\mu P_\mu - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)f\end{aligned} \tag{A-11}$$

となることがすぐにわかる．ただし，

$$P_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\mu P_\mu \tag{A-12}$$

である．(因子 i は演算子がエルミートであることを示すため便宜的に付けた．また，これらの演算子は後で物理量として解釈される．) 演算子の交換関係は簡単に計算でき，

$$\begin{aligned}[P_\mu, P_\nu] &= 0,\\ [M_{\mu\nu}, P_\alpha] &= i(\eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\alpha\nu}P_\mu),\\ [M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] &= i\left(\eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta}\right)\end{aligned} \tag{A-13}$$

となることがわかる．並進変換とローレンツ変換に関するこの代数は，ポア

ンカレ代数と呼ばれる．ここではスカラー関数の無限小変換からこの代数を導いたが，これはより一般に成り立つ．また，この代数をもちいてスピンをもつ粒子を特徴づけることができる．

例えば，ベクトル関数 $A_\mu(x)$ の変換は $A_\mu dx^\mu$ をスカラーとみなして導出することができる．すなわち，$\delta A_\mu dx^\mu = A_\mu(x')dx'^\mu - A_\mu(x)dx^\mu$ となる．より具体的に書くと，

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \xi^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu \\ &= \left(i a^\alpha P_\alpha - \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right)_\mu^{\ \nu} A_\nu \end{aligned} \tag{A-14}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} P_\alpha &= i\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ M_{\alpha\beta} &= (x_\alpha P_\beta - x_\beta P_\alpha) + S_{\alpha\beta}, \\ (S_{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= -i(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}) \end{aligned} \tag{A-15}$$

である．$S_{\alpha\beta}$ は (4×4) 行列とみなせる．α, β は対象となるローレンツ変換のタイプを指定する添え字である．また，μ, ν はこの行列要素を指定する．(A-15) は行列表示として理解される．つまり，$a^\alpha P_\alpha, x_\alpha P_\beta - x_\beta P_\alpha$ などは単位行列 δ_μ^ν に比例する量である．$S_{\alpha\beta}$ についての積を行列の積と理解すれば，(A-15) の P_α, $M_{\alpha\beta}$ は (A-13) と同じ交換関係に従うことが簡単にわかる．この $S_{\alpha\beta}$ はローレンツ生成子へのスピンの寄与を表す．

定ベクトル k_μ に対して，そのローレンツ変換は $S_{\mu\nu}$ によって完全に生成される．有限の変換は多くの無限小変換の重ね合わせで与えられるので

$$\begin{aligned} k'_\mu &= \left[\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{i}{2}\frac{\omega^{\alpha\beta}}{N} S_{\alpha\beta} \right)^N \right]_{\mu\nu} k^\nu \\ &= \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \right]_\mu^{\ \nu} k_\nu \\ &\equiv L_\mu^{\ \nu} k_\nu \end{aligned} \tag{A-16}$$

と書ける．このとき行列 $L_\mu^{\ \nu}$ は

$$L_\mu^{\ \alpha} L_\nu^{\ \beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \tag{A-17}$$

をみたす．また，$det\,L = 1$，$L^0_0 = 1$ が成り立つ．（これは，順時な (orthochronous) 固有ローレンツ変換と分類されることがある．行列式が -1 の場合は非固有 (improper) 変換と呼ばれ，これは順時固有変換とパリティや時間反転などの離散的な変換の組み合わせとして理解できる．離散的な変換も固有距離の対称性であるがここでは議論しない．これらは，12 章で議論したように，汎関数積分の枠組みで最も簡単に理解できる．）

ポアンカレ代数 (A-13) は自由粒子の観測量についての基本的な代数である．したがって，量子力学についての考察から，自由粒子の波動関数はポアンカレ代数のユニタリー表示をもちいて表せることがわかる．並進変換の生成子 P_μ は粒子の 4 元運動量であり，$P_0 = H$ はハミルトニアンである．M_{ij} は空間回転の生成子であり，よって $J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M_{jk}$ は角運動量を与える．また，$M_{0i} \equiv K_i$ は相対運動をする 2 つの座標系を結ぶローレンツ変換の生成子である．この変換はブーストと呼ばれる．これらの成分でポアンカレ代数を分解すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&[P_i, P_j] = 0, \qquad && [P_i, H] = 0,\\
&[J_i, P_j] = i\,\epsilon_{ijk}P^k, \qquad && [J_i, H] = 0,\\
&[K_i, P_j] = i\,\delta_{ij}H, \qquad && [K_i, H] = iP_i,\\
&[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk}J^k, &&\\
&[J_i, K_j] = i\,\epsilon_{ijk}K^k, &&\\
&[K_i, K_j] = -i\,\epsilon_{ijk}J^k. &&
\end{aligned}
\tag{A-18}
$$

これらの関係式を求めるに当たり，ϵ^{ijk} は数値的なレビ-チビタ記号であり，$\epsilon^{ijk}\epsilon^{iab} = \delta^{ja}\delta^{kb} - \delta^{jb}\delta^{ka}$ となることに注意しよう．

A-2　ポアンカレ代数のユニタリー表現

ポアンカレ代数のユニタリー表示を構成するに当たり，まず演算子 P_μ が互いに可換であることつまり同時対角化可能であることに注意しよう．すると，4 元ベクトル p_μ に依存する状態 $|p\rangle$ を

$$P_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle \tag{A-19}$$

と定義できる．つぎに，交換関係 (A-13) から，P_μ の有限なローレンツ変換は

$$P'_\mu = L(\omega)_\mu^\nu P_\nu \tag{A-20}$$

と計算できる．$P'_\mu = U(\omega)P_\mu U^{-1}(\omega), U(\omega) = \exp(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu})$ とすると，(A-13) は上の結果の無限小変換の場合に相当する．したがって，4 元運動量の固有値 p_μ に対して $p'_\mu = L_\mu^\nu p_\nu$ となる．

演算子 P_μ の変換則より，P^2 はローレンツ変換のもとで不変である，また P_μ は可換であるので P^2 はすべての P_μ および $M_{\mu\nu}$ と交換する．つまり，これはポアンカレ代数のカシミール演算子である．したがって，代数の可能な表現は P^2 の値で特定される．これを分類すると，次のようになる．

1. $P^2 > 0$　(例えば，$P^2 = m^2$ とする)，
2. $P^2 < 0$,
3. $P^2 = 0$.

$P^2 > 0$ は質量 m の粒子を表す．(実際，条件 $P^2 = m^2$ は粒子の質量 m の定義とみなすことができる.) $P^2 < 0$ は光速より速い伝播を意味するので物理的ではない．また，$P^2 = 0$ は光子などの無質量粒子を表す．

ポアンカレ代数にはもう 1 つのカシミール演算子が存在する．これは W^2 で与えられる．ただし，W^μ は

$$W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_\nu M_{\alpha\beta} \tag{A-21}$$

で定義される．W^μ はパウリ–ルバンスキー (Pauli–Lubanski)・スピンベクトルと呼ばれる．W^2 をもちいてさらに表現を特定することができる．しかし，W^2 の可能な値について一般的な議論を行う代わりに，ここでは単に対象となる表現について解析し，それぞれの場合について W^2 を計算することとする．

p^2 が m^2 または 0 であるとすると，状態 $|p\rangle$ に対して，$p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$（または $p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2}$）となる．$p_\mu$ のローレンツ変換から，L_μ^ν は p_0 の符号を変えないことが簡単にわかる．したがって，p_0 の符号をもちいて代数表現をさらに特定することができる．物理的に興味ある場合（つまりエネルギーが正のとき），その表現は

$$
\begin{aligned}
p^2 &= m^2 \qquad (p_0 > 0), \\
p^2 &= 0 \qquad (p_0 > 0)
\end{aligned}
\tag{A-22}
$$

となる．

よって，状態 $|p\rangle$ は3次元運動量 $\boldsymbol{p}$ で特定される．ただし，$p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$（無質量のときは $p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}$）である．条件 (A-22) をみたす p 空間のすべての状態が完全な状態を与える．条件 (A-22) はローレンツ不変なので，p 積分を行うに当たりローレンツ不変な積分測度

$$
d\mu(p) = \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \tag{A-23}
$$

を選べる．(無質量のときは $m = 0$ である.）この測度をもちいて p_0 成分の積分を簡単に実行することができる．すると，(A-23) の代わりに

$$
d\mu(p) = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p} \tag{A-24}
$$

と書ける．ただし，ω_p は p_0 の正の解 $\omega_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ であり，積分範囲はすべての $\boldsymbol{p}$ にわたる．状態 $|p\rangle$ の完全性は

$$
\int |p\rangle \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\langle p| = 1 \tag{A-25}
$$

と表せる．また P_i はエルミートなので，$\boldsymbol{p}$ の値が異なる状態は直交関係をもたなければならない．このとき，完全性の関係式 (A-25) に対応する正規直交条件は

$$
\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3 2\omega_p\, \delta^{(3)}(p - p') \tag{A-26}
$$

と表せる．

A-3　質量粒子

ここまで運動量演算子 P_μ の作用についてのみ考えてきた．つぎに，ローレンツ変換がどのように状態 $|p\rangle$ に作用するかを議論しよう．ここではウィグナーによる方法に従う．方針としては，まず適切に選ばれた特定の座標系で代数表現を構成し，次に適当なローレンツ変換を施すことによって一般座標系に戻ることを考える．したがって，(A-22) をみたす特定の p_μ を選ぶこ

とから始めよう．まず，質量粒子の場合は

$$p_\mu = p_\mu^{(0)} = (m, 0, 0, 0) \tag{A-27}$$

ととれる．これは粒子の静止系に当たる．$p_\mu^{(0)}$ から p_μ を導く特定のローレンツ変換 $L(\omega_0) = B(p)$ がある．つまり，

$$p_\mu = B(p)_\mu^\nu \, p_\nu^{(0)} \tag{A-28}$$

となる．実際，このような B は数多くある．具体的に一例を挙げると

$$B_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - \frac{(p_\mu + m\eta_\mu)(p^\nu + m\eta^\nu)}{m(p_0 + m)} + \frac{2p_\mu \eta^\nu}{m} \tag{A-29}$$

となる．ここで，η_μ は $\eta_0 = 1$, $\eta_i = 0$ となる定ベクトルである．

静止系内で変換を行うこともできる．$L(\omega)p^{(0)} = p^{(0)}$ となる変換 $L(\omega)$ は，**小群** (little group) あるいは $p^{(0)}$ の等方部分群 (isotropy group) を成す．（この変換は $(Lp^{(0)})_\mu = L_\mu^\nu p_\nu^{(0)}$ と行列成分をもちいて理解できる.）いまの場合，これらは空間回転 $R(\omega) = L(\omega)$ $(\omega^{0i} = 0)$ を与えることは明らかである.（もちろん，このような回転の自由度は B を選ぶ際にも現れる.）空間回転のユニタリー表現はよく知られており，これは標準的な角運動量の理論で与えられる．その表現は角運動量の 1 成分，例えば J_3 の最大値 s によって特徴づけられる．このとき $(2s+1)$ 個の状態があり，その変換則は

$$U(\theta)\,|s, n\rangle = \sum_{n'} \mathcal{D}_{nn'}^{(s)}(\theta)\,|s, n'\rangle \tag{A-30}$$

で与えられる．ここで，$\theta^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}$ である．また，$\mathcal{D}_{nn'}^{(s)}(\theta)$ $(n, n' = 1, 2, \ldots, 2s+1)$ は角運動量理論における標準的なウィグナーの $\mathcal{D}$ 行列である．よって，これはユニタリー条件 $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = 1$ をみたす行列とみなせる．これらは $\mathcal{D}_{nn'}^{(s)}(\theta) = \langle s, n|e^{i\theta^k J_k}|s, n'\rangle$ と表せる．ここで，J_k は角運動量の生成子であり，$|s, n\rangle$ はスピン s の角運動量状態である．

ここで，すべてのポアンカレ群の表現が $|p, s, n\rangle$ と表される状態から得られるという重要な考察を行うことができる．言い換えると，ヒルベルト空間の基底は直積 $|p\rangle \otimes |s, n\rangle$ によって与えられる．ただし，$|s, n\rangle$ は小群のユニタリー表現（いまの場合は $p^{(0)}$ の空間回転）である．一般のローレンツ変換の作用は，(A-30) にあるように空間回転の作用から求めることができる．し

たがって，すべてのローレンツ変換に対して，ウィグナー回転と呼ばれる純粋な空間回転を構成することができる．この空間回転は

$$R(\theta_W) = B^{-1}(L(\omega)p)\, L(\omega)\, B(p) \tag{A-31}$$

で与えられる．ここで，$R(\theta_W)p^{(0)} = p^{(0)}$ なので，上式の右辺の組み合わせは確かに空間回転であることがわかる．したがって，すべての $\omega^{\mu\nu}$ について，(A-31) で定義される回転角度 θ^i_W を決めることができる．よって，パラメータ $\omega^{\mu\nu}$ をもつ一般的なローレンツ変換の状態への作用は

$$U(\omega)|p,s,n\rangle = \sum_{n'} \mathcal{D}^{(s)}_{nn'}(\theta_W(p,\omega))\, |Lp,s,n'\rangle \tag{A-32}$$

と定義できる．状態 $|s,n\rangle$ への回転の作用はユニタリー（つまり，$\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} = 1$）なので，(A-32) はローレンツ変換のユニタリー表示を定義することがわかる．これは，スカラー積 (A-26) をもちいて直接確認できる．このように回転の作用からローレンツ変換の作用を誘導できるので，(A-32) のような表現は**誘導表現**と呼ばれる．

質量粒子の状態の特性は以上から明らかであろう．つまり，これらの状態はスピン s とその $(2s+1)$ 個の偏極状態によって特定される．スピンはまた $\mathcal{D}$ 行列を特定する．これらの状態への並進変換の作用は $e^{-iP\cdot a}$ で与えられ，運動量の固有関数へ作用する場合，これは単に $e^{-ip\cdot a}$ の因子を与える．回転を含むローレンツ変換の状態への作用は (A-32) で表される．

補足として，無限小ローレンツ変換に対してウィグナー回転がどのように計算されるかをみてみよう．(A-31) より

$$R \approx 1 - B^{-1}\omega B + (\delta B^{-1})\, B \tag{A-33}$$

となる．成分ごとにみると

$$R^0_0 = 1,\ \ R^i_0 = 0 = R^0_i,\ \ R^j_i = \delta^j_i - \omega^j_i - \frac{1}{(p_0+m)}(\omega_{0i}p^j - \omega^{0j}p_i) + \cdots \tag{A-34}$$

となることがわかる．これよりウィグナー回転のパラメータは

$$\theta^i_W(p,\omega) \approx \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\omega_{jk} + \frac{2}{(p_0+m)}\omega_{0j}p_k\right) \tag{A-35}$$

と特定される．

4 元運動量を $p_\mu^{(0)}$ で固定したとき，パウリ–ルバンスキー・スピン演算子は角運動量演算子 $W^0 = 0, W^i = mJ^i$ となる．W^μ がスピン演算子と呼ばれるのはこのためである．また質量粒子の表現をもちいると，W^2 は $m^2 s(s+1)$ となることがわかる．

A-4　スピン 0 粒子の波動関数

スピン 0 粒子の場合，$s=0$ なので変換の $\mathcal{D}$ 行列は自明となる．並進変換の状態 $|p\rangle$ への作用は

$$e^{-iP\cdot a}\,|p\rangle = e^{-ipa}\,|p\rangle \tag{A-36}$$

で与えられる．ここで，a^μ は有限な並進変化を表す．よって，運動量 p の粒子の x 空間における波動関数は

$$\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = e^{-ipx} \tag{A-37}$$

ととれる，なぜなら (A-36) にあるように $x \to x+a$ は $e^{-iP\cdot a}$ の作用によって再現できるからである．(px は $p\cdot x = p^0x^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$ を表す．) $\psi_p(x)$ はローレンツ・スカラーである．x 空間の波動関数に対するスカラー積は

$$\int d^3x\ [\psi_p(x)^*(i\partial_0\psi_{p'}(x)) - (i\partial_0\psi_p(x)^*)\psi_{p'}(x)] = 2p_0(2\pi)^3\delta^{(3)}(p-p') \tag{A-38}$$

ととれる．正規化条件 (A-26) との整合性の要請から，これが正しい内積の形であることがわかる．また，スカラー積

$$\langle 1|2\rangle = \int d^3x\ [\psi_1^*(i\partial_0\psi_2) - (i\partial_0\psi_1^*)\psi_2] \tag{A-39}$$

がローレンツ不変であることは簡単に確認できる．

本文では，粒子の生成・消滅を簡単に解釈するために，粒子を体積 $V=L^3$ の立方体のなかで考え，計算の最後に極限 $V\to\infty$ をとった．(なお，この極限でもローレンツ対称性は保存される．) このとき，運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子の波動関数は

$$u_p(x) = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_p V}} \tag{A-40}$$

となる．波動関数には周期的境界条件を課す．もちろん，最終的には極限

$V \to \infty$ での境界の振る舞いによって物理的な結果は変わらないはずである．したがって，周期条件を課すことに問題はない．空間方向の並進 L についての周期条件 $u_p(x+L) = u_p(x)$ を課すと，$\boldsymbol{p}$ は

$$p_i = \frac{2\pi n_i}{L} \tag{A-41}$$

となる．ここで，(n_1, n_2, n_3) は整数である．波動関数 $u_p(x)$ は正規直交条件

$$\int_V d^3x \, \left[u_p^*(i\partial_0 u_{p'}) - (i\partial_0 u_p^*)u_{p'}\right] = \delta_{p,p'} \tag{A-42}$$

に従う．ここで，$\delta_{p,p'}$ は n_i の値についてのクロネッカーの δ を意味する．つまり，

$$\delta_{p,p'} = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'}\delta_{n_3,n_3'} \tag{A-43}$$

である．$V \to \infty$ の極限で，これは

$$\begin{aligned} \delta_{p,p'} &\to \frac{(2\pi)^3}{V}\delta^{(3)}(p-p'), \\ \sum_p &\to \int V \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \end{aligned} \tag{A-44}$$

となる．

波動関数 ψ_p（あるいは u_p）は明らかに方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\,\psi \tag{A-45}$$

の解である．右辺の微分演算子は局所的な演算子ではない．つまり，これは

$$\sqrt{-\nabla^2 + m^2} f(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} f(p) \tag{A-46}$$

という意味で解釈されなければならない．ただし，

$$f(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} f(p) \tag{A-47}$$

である．もちろん，波動関数 (A-40) が解となるような局所的な微分演算子を定義することもできる．これはクライン–ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \tag{A-48}$$

であり，$\Box$ はダランベール演算子 $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_0)^2 - \nabla^2$ である．方程式 (A-48) の解には (A-40) 以外にも $p_0 = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ となる e^{-ipx} をもつ解も存在する．1 粒子の波動関数という情報だけから，この解を理解するのは困難である．しかし，場の量子論の枠組みにおいてはこの解を矛盾なく解釈することができ，クライン–ゴルドン方程式はスピン 0 粒子の議論に欠かせない基礎方程式となる．

A-5　スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の波動関数

スピン $\frac{1}{2}$ 粒子は，$s = \frac{1}{2}$ なので 2 つのスピン状態をもつ．並進変換は (A-36) のように作用し，運動方程式は 2 成分をもつ．つまり，

$$\psi_{p,r}(x) = \langle x | p, s = \tfrac{1}{2}, r \rangle \tag{A-49}$$

$(r = 1, 2)$ となる．このとき，変換の $\mathcal{D}$ 行列は自明ではなく，(2×2) の回転行列

$$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(\theta) = \exp\left(i \frac{\sigma_a}{2} \theta^a \right) \tag{A-50}$$

となる．ここで，σ_a はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A-51}$$

である．

波動関数は方程式

$$i \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial t} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\, \psi_r(x) \tag{A-52}$$

の解である．多くの例で知られているように，質量 m，スピン $\frac{1}{2}$ の粒子は同質量の反粒子をもつ．反粒子の波動関数 $\phi_r(x)$ も同様に (A-52) をみたす．(ただし，ψ_r を ϕ_r で置き換える．) よって，これらが組み合わさった波動関数 $\Psi(x)$ を

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_r(x) \\ \phi_r^*(x) \end{pmatrix} \tag{A-53}$$

と定義できる．$\Psi(x)$ は 4 成分の列ベクトルであり，方程式

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \gamma_0 \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\, \Psi \tag{A-54}$$

をみたす．ただし，

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A-55}$$

である．これはスピン $\frac{1}{2}$ 粒子のディラック方程式の 1 つであり，フォルディ–ヴートハイセン (Foldy–Wouthuysen) 表現と呼ばれる．スピン 0 粒子のクライン–ゴルドン方程式のように，$\Psi(x)$ の局所的な微分方程式を求めることもでき，それは通常のディラック方程式となる．ただし，(A-54) を局所的な形に変形するよりも，ディラック方程式から (A-54) を示すほうが簡単である．

A-6　スピン 1 粒子

スピンが $s = 1$ の場合，3 つのスピン状態があり，波動関数は

$$\psi_{p,r}(x) = \langle x|p, s = 1, r\rangle = e^{-ipx}\epsilon_r(p) \tag{A-56}$$

$(r = 1, 2, 3)$ となる．ここで，ϵ_r は回転のもとでベクトルとして変換する．すなわち，無限小では

$$\delta\epsilon_r = \omega_{rk}\epsilon_k \tag{A-57}$$

と変換する．ϵ_r は 4 元ベクトルの空間成分のように振る舞う．スピン 1 粒子に対応する局所的なクライン–ゴルドン方程式は

$$(\Box + m^2)\psi_r(x) = 0 \tag{A-58}$$

と予測できる．任意の $\epsilon_r(p)$ に対して，関数 (A-56) は明らかに (A-58) の解を与える．しかし，4 元ベクトルの空間成分しか現れていないので，この方程式は共変でない．よって，局所的かつ共変な方程式は

$$(\Box + m^2)\psi_\mu(x) = 0 \tag{A-59}$$

$(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と予想される．しかし，ψ_μ は余分な成分 ψ_0 をもつ．したがって，局所的かつ共変な方程式を得るには，(A-59) に ψ_μ の余分な自由度を除

くような拘束条件を課さなければならない．あるいは，(A-59) とは異なる方程式を選び，そこに余分な自由度を除去するのに有効な対称性を与えてやればよい．この余分な対称性がゲージ対称性である．粒子の観点で考えると，ゲージ対称性は物理的なスピン状態の数つまり $(2s+1)$ と局所的かつ共変な方程式を構成するのに必要なローレンツ・ベクトルあるいはテンソルの数が一致しないことに起因する．(本文で議論したように，ゲージ対称性については深い幾何学的な解釈を行うこともできる．) ゲージ対称性はスピンが $s \geq 1$ となるすべての粒子に要請される．

A-7　無質量粒子

ポアンカレ代数を質量粒子の作用の対称性として導いたが，これは無質量粒子についても同様に成り立つ．このことは，例えば，(作用を考える代わりに[7]) 運動方程式の対称性を考えてもわかるし，また無質量粒子が $ds = 0$ をみたすことからもわかる．(無質量粒子は一般時空上のヌル測地線に沿う．) したがって，無質量粒子もポアンカレ代数の既約ユニタリー表現によって記述される．このとき，$p^2 = 0$ および $p_0 > 0$ となる．また，粒子の静止系は存在しない．よって，$p^2 = 0, p_0 > 0$ の一般解は特定のベクトル $p_\mu^{(0)} = (1,0,0,1)$ のローレンツ変換によって構成できる．質量粒子の場合，$p_\mu^{(0)} = (m,0,0,0)$ を不変にするような変換つまり空間回転を考えた．ウィグナー回転をもちいてこの空間回転の作用を考えることにより，一般的なローレンツ変換の状態への作用を求めた．無質量粒子の場合もベクトル $p_\mu^{(0)} = (1,0,0,1)$ を不変にするような変換，すなわちこのベクトルの等方部分群を考えることにより，同様の構成を行うことができる．これらの無限小変換は $\omega^{\mu\nu} p_\nu^{(0)} = 0$ をみたす $\omega^{\mu\nu}$ で与えられる．このとき，$p_\mu^{(0)}$ を保存するような一般ローレンツ変換は

$$
\begin{aligned}
U &\approx 1 + i\left(\omega^{01}(M_{01} + M_{13}) + \omega^{02}(M_{02} + M_{23}) + \omega^{12} M_{12}\right) \\
&\approx 1 + i\left(\omega^{01} T_1 + \omega^{02} T_2 + \omega^{12} M_{12}\right)
\end{aligned}
\tag{A-60}
$$

7 ［訳註］無質量粒子の作用は，一脚場 (einbein) と呼ばれる補助場を導入すると構成でき，それからポアンカレ代数についての対称性を導くことができる．

の形になることがわかる．ここで，$T_i = M_{0i} + M_{i3}$ $(i = 1, 2)$ であり，M_{12} は運動量 $\boldsymbol{p}$ の方向（この場合 z 軸）のまわりの回転を生成する．これらの演算子の交換関係は

$$[M_{12}, T_\pm] = \pm T_\pm, \qquad [T_+, T_-] = 0 \tag{A-61}$$

となる．ただし，$T_\pm = T_1 \pm iT_2$ である．この特定の $p_\mu^{(0)}$ に対して，W^2 は

$$W^2 = T_+ T_- \tag{A-62}$$

となることも確認できる．よって，状態とその表現の 1 つとして，

$$T_+|p,\lambda\rangle = 0, \quad T_-|p,\lambda\rangle = 0, \quad M_{12}|p,\lambda\rangle = \lambda|p,\lambda\rangle \tag{A-63}$$

をとることができる．ただし，$W^2 = 0$ とする．この場合，W^2 と p^2 がゼロで，また (A-21) から $W \cdot p = 0$ なので，W^μ は p^μ に比例しなければならない．実際，$W^\mu = \lambda p^\mu$ となる．この式は λ についての不変な定義である．これはまた

$$\lambda = \frac{W^0}{p^0} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{J}}{p^0} \tag{A-64}$$

と書ける．λ は粒子のヘリシティと呼ばれる．M_{12} は回転を生成するので，変換 $\omega^{12} \to \omega^{12} + 2\pi$ のもとでの不変性から，一価表現に対して $\lambda = 0,\ \pm 1, \ldots,$ 二価表現に対して $\lambda = \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}, \ldots$ が与えられる．光子 $(\lambda = \pm 1)$ と重力子 $(\lambda = \pm 2)$ はこれらの表現の実例である．質量粒子の場合と同様に，$p_\mu = B_\mu^\nu p_\nu^{(0)}$ となる適切な B_μ^ν とウィグナー回転，およびこれらの状態に作用する一般のローレンツ変換を具体的に構成することができる．この点についてはここでは議論しないことにする．というのも，いまの場合，局所的な運動方程式を場の理論の手法をもちいて解くことで波動関数とそのローレンツ変換を比較的容易に導くことができるからである．

$T_\pm$ がゼロで表されない表現を構成することもできる．しかし，そのような表現は無数の偏極状態をもつため，物理的には重要でないと考えられる．

A-8 位置演算子

これまで，位置を観測量の代数に含められるべき演算子として考えてこな

かった．代数表現を求めるという観点からは，x^μ が x 空間の波動関数に明示的に現れるので，この演算子もこれまでと大きな違いはない．しかし，x^μ は位置演算子として適切でない．例えば，x^0 は時刻を表す．点粒子の場合，これは単に粒子の経路のパラメータである．よって，x^0 を演算子と解釈するのは困難である．ニュートン (Newton) とウィグナー (Wigner) は位置演算子についての適切な概念を定義し，さまざまな場合についてこれを計算した．ここではその詳細について議論しないが，スピン 0 の質量粒子の場合は，$\boldsymbol{x}$ が位置演算子として適切でないことが簡単にわかる．つまり，スカラー積 (A-26) のもとでこれは自己随伴でない．自己随伴演算子となるように修正すると，位置演算子は

$$\boldsymbol{x} = i\nabla_{\boldsymbol{p}} - i\frac{\boldsymbol{p}}{2E} \tag{A-65}$$

で与えられる．これは低速度の非相対論的粒子の位置，つまり局在化した波束の質量中心を与えるという意味で適切な位置演算子であることがわかる．式 (A-65) は，この場合のニュートン–ウィグナー (Newton–Wigner) 演算子である．スピンをもつ粒子に対しては，ニュートン–ウィグナー位置演算子は一般にスピン依存項をもつ．

A-9　等長変換，エニオン

これまでの議論，つまり 1 粒子状態を対称性の代数表現をもちいて理解すること，をある特殊な状況に適用してみよう．例えば，平坦なミンコフスキー空間とは限らない時空間での自由粒子の運動を考えよう．作用は $\mathcal{S} = -m\int\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ で与えられる．ここで，$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである．対称性が $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ であることを要請すると，

$$g_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + g_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} + \xi^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{A-66}$$

を得る．この式は次のように書き換えられる．

$$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = 0 \tag{A-67}$$

ここで，

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \partial_\mu \xi_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \xi_\alpha,$$
$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \right) \tag{A-68}$$

である．ここで，$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ はクリストッフェル記号，$\nabla_\mu \xi_\nu$ は ξ_ν の共変微分である．方程式 (A-67) はキリング方程式であり，その解 ξ^μ は等長変換 (isometry)，つまり距離 ds（あるいは自由粒子の作用）を保存する変換を与える．等長変換は計量 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ の時空間の群，等長変換群を成す．量子力学の一般論から，このような時空上の粒子の運動に対するヒルベルト空間は等長変換群の既約ユニタリー表現によって与えられることがわかる．簡単な具体例として，反ドジッター時空がある．この時空間は計量

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 + dz_4^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu + dz_4^2 \tag{A-69}$$

をもつ．ここで，

$$\eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu + z_4^2 = R^2 \tag{A-70}$$

である．(A-70) はある座標パッチで有効な局所座標をもちいて次のように解ける．

$$z_0 = R \sin t, \quad z_4 = R \cos t \, \cosh \chi,$$
$$(z_1, z_2, z_3) = \cos t \, \sinh \chi \, (\cos\theta, \sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi). \tag{A-71}$$

これを (A-69) に代入すると，より標準的な形の 4 次元計量が与えられる．補助変数 z_4 をもちいて空間を (A-69), (A-70) で表すと，その等長変換は 2 次形式 $(\eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu + z_4^2)$ を保存する変換であることがわかる．この変換は $SO(3,2)$ 群を成す擬直交変換（といくつかの離散的な対称性変換）である．したがって，$SO(3,2)$ の既約ユニタリー表現によって，反ドジッター時空上の粒子の運動が分類される．

もう 1 つの例として，次の計量をもつ 3 次元時空間を考えてみよう．

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2). \tag{A-72}$$

簡単のため，計量の特殊性は空間次元に限るとする．平坦な空間の場合，$g_{ij} = \delta_{ij}$ であり，空間回転 $\delta x_i = \theta \epsilon_{ij} x^j$ は明らかに対称性である．状態は $|p, s\rangle$ で表され，$p_\mu = p_\mu^{(0)}$ となる静止系において空間回転の状態への作用は

$$U(\theta)|p^{(0)},s\rangle = e^{is\theta}|p^{(0)},s\rangle \tag{A-73}$$

で与えられる．ここで，多価表現が許されるとすると，s は整数である必要はない．一般に，スピンの値に制限のない粒子はエニオン (anyon) と呼ばれる．分数量子ホール効果に現れる準粒子 (quasi-particle) はこのタイプの粒子である.（この物理系は本質的に平面にあるので，2 次元平面による記述は適切なものである．また，非相対論的な近似をとることもまったく問題ない.）

空間が半径 R の球面のとき，球面上の極座標 θ,φ をもちいて

$$g_{ij}dx^i dx^j = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{A-74}$$

となる．このとき，等長変換は

$$\xi_{(1)} = (-\sin\varphi, -\cos\varphi\cot\theta),\quad \xi_{(2)} = (\cos\varphi, -\sin\varphi\cot\theta),\quad \xi_{(3)} = (0,1) \tag{A-75}$$

で与えられる．生成子 $L_\mu = -i\xi^i_{(\mu)}(\partial/\partial x^i)$ は角運動量の代数 $[L_\mu, L_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\alpha}L_\alpha$ $(\mu,\nu,\alpha = 1,2,3)$ に従う．言い換えると，2 次元球面の等長変換群は角運動量の群 $SU(2)$ で与えられる．ユニタリー表現は明らかに整数あるいは半奇数のスピンを要請する．したがって，少なくとも $\mathcal{S} = -m\int ds$ の作用をもちいる場合，球面世界上でエニオンは存在しない．また，世界面が 2 次元計量 $ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2$ のトーラスである場合，どのような種類のエニオンが可能であるか調べてみるのも興味深い問題である．

参考文献

1. ハイゼンベルク代数表現の既約性に関する定理は M.H. Stone, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **16**, 172 (1930); J. von Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931) による．

2. ポアンカレ群の表現論は E.P. Wigner, Ann. Math. **40**, 149 (1939) による．

3. 位置演算子は T.D. Newton and E.P. Wigner, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949) で導入された．

4. 等長変換とキリング方程式については，一般相対性理論のほとんどの教科書で扱われている．例えば，S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press (1973) を参照されたい．反ドジッター空間についてもここで議論されている．

5. ポアンカレ群をもちいた 3 次元エニオンの解析は B. Binegar, J. Math. Phys. **23**, 1511 (1982) で与えられている．

一般的な参考文献

1. Lowell S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1992).
2. C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill Inc. (1980).
3. J.M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag (1955 & 1976).
4. Michio Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, Inc. (1993).
5. F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley (1984).
6. Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).
7. P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley Pub. Co. Inc. (1990).
8. Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985 & 1996).
9. S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper and Row, New York (1961).
10. S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It*, Princeton University Press (1994).
11. Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume I Foundations*, Cambridge University Press, (1995);
    The Quantum Theory of Fields: Volume II Modern Applications, Cambridge University Press, (1996);
    The Quantum Theory of Fields: Volume III Supersymmetry, Cambridge University Press, (2000).
12. Anthony Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2003).
13. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press (1996).

索　引

※記載ページは各項目の末尾に示し，ローマン体が基礎編，イタリック体が発展編を表す．

●ま行

著　者

V. P. ナイア (V. Parameswaran Nair)

Physics Department
City College of the CUNY
160 Convent Avenue
New York, NY 10031
USA

訳　者

阿部 泰裕（あべ やすひろ）

ニューヨーク市立大学大学院博士課程修了．Ph. D.

磯 暁（いそ さとし）

高エネルギー加速器研究機構准教授，理学博士．

現代的な視点からの場の量子論 基礎編

2009 年 12 月　6 日　初版

著　者　V. P. ナイア
訳　者　阿部 泰裕／磯 暁
発行者　深田 良治
発行所　シュプリンガー・ジャパン株式会社
〒102-0073　東京都千代田区九段北 1 丁目 11 番 11 号 第 2 フナトビル
TEL (03) 6831-7005（営業直通）
http://www.springer.jp
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 978-4-431-10073-7　C3042　Printed in Japan

Springer

シュプリンガー現代数学シリーズ

1	量子群とヤン・バクスター方程式	●神保道夫著 ISBN978-4-431-70594-9	本体3,690円
2	モザイクと３次元多様体	●J. M. モンテシーノス著　前田亨訳 ISBN978-4-431-70628-1	品 切
3	エルゴード理論とフラクタル	●釜江哲朗／高橋智著 ISBN978-4-431-70645-8	本体5,728円
4	超幾何関数論	●青本和彦／喜多通武著 ISBN978-4-431-70662-5	本体6,408円
5	可換代数と組合せ論	●日比孝之著 ISBN978-4-431-70664-9	品 切
6	D加群と代数群	●谷崎俊之／堀田良之著 ISBN978-4-431-70682-3	本体5,049円
7	ゲージ理論とトポロジー	●深谷賢治著 ISBN978-4-431-70668-7	本体6,020円
8	特異点入門	●石井志保子著 ISBN978-4-431-70730-1	本体4,700円
9	球面上の代数的組合せ理論	●坂内英一／坂内悦子著 ISBN978-4-431-70771-4	本体4,800円
10	ファインマン経路積分の数学的方法 －時間分割近似法－	●藤原大輔著 ISBN978-4-431-70748-6	本体4,700円
11 12	ミクロからマクロへ　１，２	●舟木直久／内山耕平著	
	１．界面モデルの数理	ISBN978-4-431-70844-5	本体4,500円
	２．格子気体の流体力学極限	ISBN978-4-431-70965-7	本体4,700円
13	多体シュレーディンガー方程式	●磯崎洋著 ISBN978-4-431-71091-2	本体5,800円
14	反復積分の幾何学	●河野俊丈著 ISBN978-4-431-70669-4	本体4,900円
15	結び目と素数	●森下昌紀著 ISBN978-4-431-10052-2	本体3,800円